Вопросы к экзамену

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Определения и формулировки

1.1 Ступенчатая функция

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — **разбиение множества**
2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если
   $\exists$ разбиение:
   $$X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \ \forall i \ f\big|_{e_i} = const = c_i$$
   При этом такое разбиение — **допустимое разбиение**

1.2 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

см. 1.1

1.3 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Измеримая функция

Определение.

- $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество функции** f
$E(f \le a),\ E(f > a), E(f \ge a)$ — также лебеговы множества
Если f задана на X: $X(f < a),\ X(f \le a), \ldots$ — лебеговы множества

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f — **измерима на множестве** E:
$\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ — измеримо(т.е. $\in \mathfrak{A}$)

Обозначение.

- f — измерима на X — говорят просто "измерима"
- $X = \mathbb{R}^m$, мера Лебега — измеримо по Лебегу

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \le a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \ge a)$ — измеримо

1.4 Свойство, выполняющееся почти везде

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верное **при почти всех** $x \in E$

$=$ **почти всюду** на E

$=$ **почти везде** на E

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$ — истино при $x \in E \setminus e$

1.5 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Сходимость почти везде

Пример. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ при почти всех $x \in E$
$\exists e, \mu e = 0$, при $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

1.6 Сходимость по мере

Определение.

- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечные
- f_n **сходится к** f **по мере**
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1.7 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

Теорема 1.1 (Егорова)**.**

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \to f$ почти везде

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset X, \ \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$

1.8 Интеграл ступенчатой функции

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X$ $\mathcal{X}_E(x) = \left[\begin{array}{ll} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{array}\right.$
2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

Определение.

1.
    - $f \geq 0$, ступенчатые
    - $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{E_k}$, E_k — измеримое

$$\int_X f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. • $f \geq 0$, измеримая

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ — ступ.}}} \int_X g d\mu$$

3. • f — измерима
   • $f^+, f^- \geq 0$ — измеримые

   Пусть $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечные
   Тогда $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$
   Если $\int_X f^+$, $\int_X f^-$ — оба конечные, то f называется **суммируемой**

   Примечание. f — измеримая, ≥ 0, интеграл 3 = интеграл 2

4.
   • $E \subset X$ — измеримое
   • f — измерима на X

$$\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E$$

1.9 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Интеграл неотрицательной измеримой функции

см. 1.8

1.10 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Суммируемая функция

см. 1.8

1.11 Интеграл суммируемой функции

см. 1.8

1.12 Образ меры при отображении

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \cdot)$
- $\Phi : X \to Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле: $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$. Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$
Тогда ν — мера:

$$\nu(\bigsqcup E_n) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E)n) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом** μ **при отображении** Φ и

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$$

1.13 Взвешенный образ меры

Определение.

- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима(на X относительно $\mathfrak{A}$)
- $\omega \geq 0$

$$\forall B \in \mathfrak{B}\ \nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

— **взвешенный образ меры** μ при отображении Φ, ω — **вес**

1.14 Плотность одной меры по отношению к другой

Определение. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — меры
Плотность меры ν **онсительно** μ — это функция $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}},\ \omega \geq 0$ — измеримая
$\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$

1.15 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие. $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация. $E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ по Лебегу

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M | E \text{ — измеримо}\} = \{\varphi(A) | A \in \mathfrak{M}^2,\ A \subset G\}$

1.16 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение. Мера на $\mathfrak{A}_M$

$$S(E) := \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, dudv$$

Т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ

Примечание. $\mathfrak{A}_M$ — σ-алгебра, S — мера

1.17 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Поверхностный интеграл первого рода

Определение (поверхностный интеграл I рода)**.**

- M — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$
- φ — параметризация
- $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема по мере s

Тогда

$$\iint\limits_M f\, ds = \iint\limits_M f(x, y, z)\, ds$$

называется **интегралом I рода от** f **по многообразию** M

Примечание. По теореме об интегрировании по взвешенному образу меры

$$\iint\limits_M f\, ds = \iint\limits_G f(\varphi(u, v)) |\varphi'_v \times \varphi'_v| \, du\, dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{pmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \sin\alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 \cdot |\varphi'_v|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$
$$E = |\varphi'_u| = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2$$
$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \quad F = |\varphi'_v|^2$$

1.18 Произведение мер

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 с п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на σ-алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

Определение. $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \nu \times \mu)$ — **произведение пространств с мерой** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

1.19 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Теорема Фубини

Теорема 1.2 (Фубини)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- ν, μ — σ-конечные
- $m = \nu \times \mu$
- f — суммируема на $X \times Y$ относительно m

Тогда

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ — суммируема на Y
3. $\int\limits_{X \times Y} f \, dm = \int\limits_X \varphi \, d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

1.20 Сторона поверхности

Определение. Сторона поверхности — непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности

- $M \subset \mathbb{R}^3$
- $W : M \to \mathbb{R}^3$

$\forall x \; W(x)$ — нормаль к M, $|W(x)| = 1$, $W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$

1.21 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

Примечание. Другой способ задания стороны поверхности

1. u, v — касательные векторы
   $u \nparallel v$, (u, v) — касательный репéр
   Если задано непрерывное поле реперов, то они задают сторону $n = u \times v$(отнормировать)
2. Задана петля + указано непрерывное движение

1.22 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Интеграл II рода

Определение.

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M
- $F : M \to \mathbb{R}^3$ — векторное поле(непрерывное)

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle \, ds$$

— **интеграл II рода** векторного поля F по поверхности M

1.23 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Определение. M — поверхность в $\mathbb{R}^3$, n_0 — сторона, γ — контур(петля) в M — ориентированный. Говорят, что **сторона поверхности** n_0 **согласована с ориентацией** γ: $(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$, $N_{\text{внутр.}}$ — вектор внутренней нормали к области, ограниченной петлей. Т.е. если ориентация γ задает сторону n_0

1.24 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

Свойство 1 (Неравенство Гёльдера)**.**

- $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- E *— измеримое*
- $f, g : E \to \mathbb{C}$ *— измеримые*

Тогда

$$\int_E |fg| d\mu \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Свойство 2 (Неравенство Минковского)**.** *Те-же условия что и в Неравенстве Гельдера*

$$\left(\int_E |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

1.25 Интеграл комплекснозначной функции

Свойство 3.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \mathbb{C}$
  $f(x) = u(x) + iv(x)$
  $u = \Re f,\ v = \Im f$
- f *— измеримая, если* u *и* v *— измеримые*
- f *— суммируемая,* u *и* v *— суммирумые*
- f *— суммируемая:* $\int_E f = \int_E u + \int_E v$

1.26 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Пространство $L^p(E, \mu)$

Свойство 4.

Определение. L^p, $1 \le p \le +\infty$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \subset X$ — измеримое

$$\mathcal{L}^p(E,\mu) := \left\{ f : \text{ почти везде } E \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \middle| f \text{ — измеримая, } \int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

— это линейное пространство (по неравенству Минковского)
$f, g \in \mathcal{L}^p(E, \mu) : f \sim g \quad f = g$ почти везде($f - g = 0$ почти везде). $\mathcal{L}^p/_\sim = L^p(E, \mu)$ — линейной пространство. Задаем норму $\|f\|_{L^p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

1.27 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Пространство $L^\infty(E, \mu)$

Примечание. $L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}),\ \text{изм.}, \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\}/_\sim$. Эквивалентные функции отождествленны — это нормированное пространство

$$\|f\|_{L^\infty(E,\mu)} := \operatorname*{ess\,sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

1.28 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Существенный супремум

Свойство 5.

- $L^\infty(E, \mu)$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- E — *измеримое*
- f — *почти везде* $E \to \overline{\mathbb{R}}$ — *измеримая*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f = \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}} \Big| f \le A \text{ почти везде}\}$$

1.29 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Ротор, дивергенция векторного поля

Определение. V — гладкое векторное поле. **Дивергенция**:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Определение.

$$\int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Omega \langle rot(V), n_0\rangle ds$$

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

— ротор векторного поля (вихрь векторного поля)

1.30 Соленоидальное векторное поле

Определение. Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ — **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если $\exists$ гладкое векторное поле B в Ω:

$$A = \operatorname{rot} B$$

B — называется **векторным потенциалом** A

1.31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

Примечание.

$$\operatorname{div} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V\,dx\,dy\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, \overline{n}_0\rangle ds$$

— не зависит от координат

см. 1.29

1.32 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Гильбертово пространство

Определение. $\mathcal{H}$ — линейное пространство в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при это $\mathcal{H}$ — полное (как метрическое пространство), то оно называется **Гильбертовым пространством**

1.33 Ортогональный ряд

Определение. $x, y \in \mathcal{H}$ x **ортогонально** y ($x \perp y$) если $\langle x, y\rangle = 0$

Определение. Ряд $\sum a_k$ — **ортогональный**, если $\forall k, l$ $a_k \perp a_l$

1.34 Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве

Определение. Сходящийся ряд: $\sum a_n,\ a_n \in \mathcal{H}$

$$S_N = \sum_{1 \le n \le N} a_n$$

Если $\exists S \in \mathcal{H}\ S_N \to S$ в $\mathcal{H}$

1.35 Ортогональная система (семейство) векторов

Определение. $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ — **ортогональное семейство**. Если:

1. $\forall k, l\ e_k \perp e_l$
2. $\forall k\ e_k \neq 0$

Если потребовать

3. $\|e_k\| = 1$

, то будет **ортонормированное семейство**

1.36 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Ортонормированная система

см. 1.35

1.37 Коэффициенты Фурье

Определение. $\{e_k\}$ — О.С. $x \in \mathcal{H}$

$$c_k(x) \coloneqq \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

— называются **коэффициентами Фурье элемента x по системе** $\{e_k\}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \cdot e_k$$

— **ряд Фурье вектора x по системе** e_k

1.38 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

см. 1.37

1.39 Базис, полная, замкнутая ОС

Определение. $\{e_k\}$ — ОС — **базис** $\mathcal{H}$, если $\forall x \in \mathcal{H}\ x = \sum c_k(x) e_k$

Определение. ОС – **полная**, если $\nexists z \neq 0 :\ z \perp$ всем e_k

Определение. ОС — **замкнутая**, если $\forall x\ \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

1.40 Тригонометрический ряд

Определение. $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический полином** степени не выше n

Определение.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— **тригонометрический ряд**, a_k, b_k — **коэффициенты тригонометрического ряда**

Определение.

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

— **комплексный тригонометрический полином** или **тригонометрический полином в комплексной записи**

Определение.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

— **тригонометрический ряд в комплексной записи**

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

1.41 Коэффициенты Фурье функции

Определение. $f \in L^1[-\pi,\pi]$. $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$ — заданные в лемме называются **коэффициентами Фурье функции** f а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$$

или

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

называются **рядом Фурье функции** f

1.42 Класс Липшица с константой М и показателем альфа

см. 2.46

1.43 Ядро Дирихле, ядро Фейера

Определение.

1. $$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)$$

   — **ядро Дирихле** (ядро в смысле kernel)
   Ядро $K(x,y)$

   $$f \mapsto \int_E f(t)K(x,y)\,dt$$

   — линейный оператор

2. $$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

   — **ядро Фейера**

1.44 $\boxed{\#\mathrm{A}}$ Свертка

Определение. $f, k \in L^1[-\pi,\pi]$

$$(f*k)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\,dt$$

— **свертка** функций f и k

1.45 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Аппроксимативная единица

Обозначение. $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta] = E_\delta$

Определение. Аппроксимативная единица

- $D \subset \mathbb{R}$
- h_0 — предельная точка в $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$ — называется аппроксимативной единицей

AE1 $\forall h \in D$, $K_h \in L^1[-\pi, \pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

AE2 L_1 — нормы функций K_h ограничены в совокупности

$$\exists M \ \forall h \ \int_{[-\pi,\pi]} |K_h| \leq M$$

AE3 $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h| \, dx \xrightarrow[h \to h_0]{} 0$$

1.46 Усиленная аппроксимативная единица

Примечание.

AE3' $K_h \in L^\infty[-\pi, \pi]$ и $\forall \delta \in (0; \pi)$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow[h \to h_0]{} 0$$

Определение. AE1 + AE2 + AE3' = **усиленная аппроксимативная единица**

1.47 Метод суммирования средними арифметическими

Определение.

$$\sum a_n \quad S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sigma_n \coloneqq \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

$$\sum a_n \underset{\text{сред. арифм.}}{=\!=\!=\!=\!=} S$$

, если $\sigma_n \to S$

1.48 Суммы Фейера

Определение. $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} S_k(f)$$

— суммы Фейера

2 Теоремы

2.1 Лемма “о структуре компактного оператора“

Лемма 1 (о структуре компактного оператора)**.** $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *— невырожденный линейный оператор, т.е.* $\det V \neq 0$
Тогда:

- $\exists$ *ортонормированные базисы* $g_1, \dots, g_m;\ h_1, \dots, h_m$
- $\exists S_1, \dots, S_m > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$ *— разложение по базису*
При этом $|\det V| = S_1 S_2 \dots S_m$

Доказательство. $W := V^* V$ * — транспонирование в $\mathbb{R}^m$
W — самосопряженный оператор(матрица симметрична относительно диагонали)
Собственные числа $c_1, \dots, c_m$ — вещественные
Собственные векторы $g_1, \dots, g_m$
Заметим что:

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0 \Rightarrow c_i > 0$$

- $S_i := \sqrt{c_i}$
- $h_i := \frac{1}{S_i} V g_i$

$$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{S_i S_j} \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i$$

, где δ_i — символ Кронекера (0 если $i \neq j$, 1 иначе)

$$V(x) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, g_i \rangle g_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) = \sum S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 = \det(V^* V) = \det W = c_1 \dots c_m \tag{1}$$

1 — т.к. диагональная матрица ☐

2.2 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

Теорема 2.1 (преобразование меры лебега при линейном отображении)**.**

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда:

- $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$
- $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

$(\det V = 0)$ $\operatorname{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ мера $= 0$

$(\det V \neq 0)$ $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера
μ — инвариантна относительно сдвигов

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + Va) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k \cdot \lambda$(Лемма из предыдущего семестра)
Q — единичный куб на векторах g_i и $V(g_i) = S_i h_i$, $V(Q) = \{\sum \alpha_i S_i h_i | \alpha_i \in [0, 1]\}$ — паралеллепипед со сторонами $S_i, \dots, S_m$

☐

2.3 Теорема об измеримости пределов и супремумов

Теорема 2.2. f_n — измерима на X.
Тогда:

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$; $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ — измеримы
2. $\overline{\lim} f_n$; $\underline{\lim} f_n$ — измеримы
3. Если
$$\forall x\ \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = h(x)$$
, то $h(x)$ — измеримо

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$
2. $$(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf\{s_n : s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)\}$$
3. очев.

□

2.4 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия

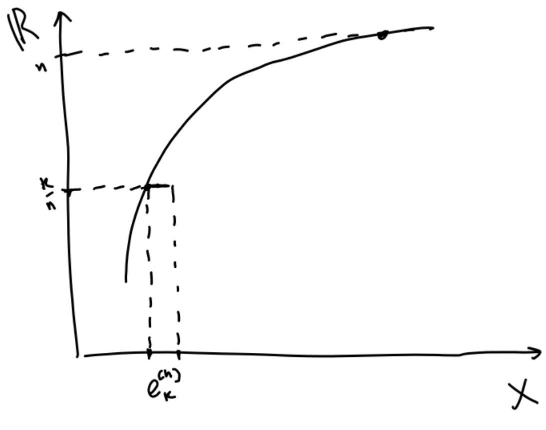
Теорема 2.3 (характеризация измеримых функции с помощью ступенчатых)**.**

- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2. $\forall x f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

Доказательство.



$$e_k^{(n)} = X(\frac{k-1}{n} \leq f \leq \frac{k}{n}) \quad k = 1, \dots, n^2$$
$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \leq f)$$
$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{e_k^{(n)}}$$
$$g_n \geq 0 \quad \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

Следствие 2.3.1. f — имзерима
Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая, $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$ всюду и $|f_n| \le |f|$

Следствие 2.3.2. f, g — измеримы
Тогда fg — измемрима $(0 \cdot \infty = 0)$

Доказательство.

- $f_n \to f$
- $g_n \to g$
- f_n, g_n — ступеначтые

$f_n g_n$ — ступенчатая $f_n g_n \to fg$ □

Следствие 2.3.3. f, g — измеримы
Тогда $f + g$ — измерима

Доказательство. $f_n \to f \quad g_n \to g$, (f_n, g_n) — ступеначтые
$f_n + g_n$ — ступенчатая $f_n + g_n \to f + g$
Считаем что $\forall x$, не может быть $f(x) = \pm\infty,\ g(x) = \mp\infty$ □

2.5 Измеримость функции, непрерывной на множестве полной меры

Теорема 2.4 (об измеримости непрерывной на множестве полной меры)**.**

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима

Доказательство. f — измерима на E'
$E'(f < a)$ — открыто в E'

$$\left.\begin{array}{c} e(f<a) \subset e \\ \lambda_m \text{ — полная} \end{array}\right\} \Rightarrow e(f<a) \text{ — измерима в } E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

2.6 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

Теорема 2.5 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- μX — конечна

Тогда $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду Частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0(т.е. $f \equiv 0$)

$$\left.\begin{array}{c} X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывность меры сверху}$$

Общий случай: $f_n \to f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда $\varphi_n \to 0$, монотонна

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

2.7 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

Теорема 2.6 (Рисс)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Тогда $\exists n_k f_{n_k} \to f$ почти везде

Доказательство. $\forall k$ $\mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \to 0$
$\exists n_k$: при $n > n_k$ $\mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$
можно считать: $n_1 < n_2 < n_3$
Проверим $f_{n_k} \to f$ почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$

$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

При $x \notin E$ $f_{n_k} \to f$

$$x \notin E\ \exists N\ x \notin E_k$$

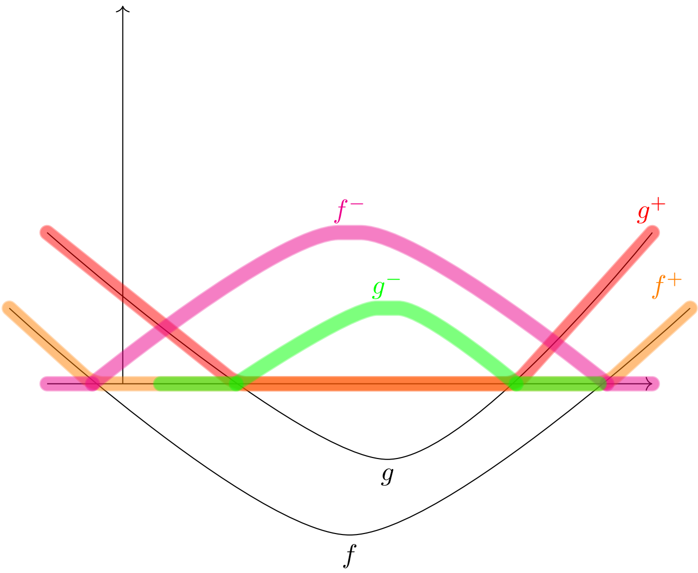
при $k > N$ $\quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, т.е. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ □

2.8 Простейшие свойства интеграла Лебега

Примечание. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \subset X$ — измеримое, g, f — измеримые. Свойства:

1. Монотонность $f \leq g$ $\int_E f \leq \int_E g$

   Доказательство.



(a) $f, g \geq 0$ — очевидно

(b) f, g — произвольные
$f^+ \leq g^+ \ f^- \geq g^-$
$\int_E f^+ \leq \int_E g^+ \ \int_E f^- \geq \int_E g^- \Rightarrow$ OK

□

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E; \int_E 0 d\mu = 0$
3. $\mu E = 0 \ \int_E f = 0$

Доказательство.

(a) f — ступенчатая

(b) $f \geq 0$ — измеримая

□

Замечание:
f — измеримая. Тогда f — суммируемая $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

($\Leftarrow$) следует из свойства 1. $f^+, f^- \leq |f|$

($\Rightarrow$) позже

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \ \forall c \in \mathbb{R} \ \int_E cf = c \int_E f$

Доказательство.

(a) $(-f)^+ = f^- \ (-f)^- = f^+$

(b) можно считать $c > 0$ для $f \geq 0$ — тривиально

□

5. $\exists \int_E f d\mu$
Тогда $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $-|f| \leq f \leq |f|$. По свойствам 1 и 4 □

6. $\mu E \leq +\infty, \ a \leq f \leq b$
Тогда $a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$

Доказательство. $a\chi_E \le f \le b\chi_E$, тривиально ☐

Следствие 2.6.4. f — измерима на E, f — ограничена на E, $\mu E < +\infty$
Тогда f — суммируемая на E

7. f — суммируемая на E. Тогда f — почти везде конечная

   Доказательство.

   (a) $f \ge 0$ $f = +\infty$ на $A \subset E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_E f \ge n\mu A$
   (b) $f = f^+ - f^-$

☐

2.9 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

Лемма 2.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

— измеримые, g — ступенчатая, $g \ge 0$
Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\int_A g d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\ge 0} = \sum_i \sum_k \dots = \sum_i \int_{A_i} g d\mu$$

☐

Теорема 2.7.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая на A
- $f \ge 0$

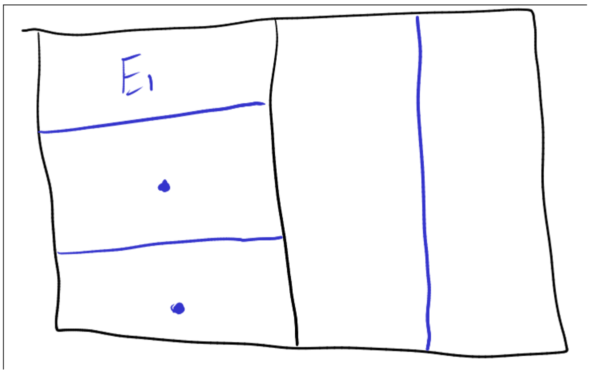
Тогда $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$

Доказательство.

($\le$) ступенчатая $g:$ $0 \le g \le f$ $\int_A g = \sum \int_{A_i} g d\mu \le \sum \int_{A_i} f$ — по Лемме

($\ge$) 1. $A = A_1 \cup A_2$
$0 \le g_1 \le f\chi_{A_1}$ $0 \le g_2 \le f\chi_{A2}$, g_1, g_2 — ступенчатые

$$g_1 = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \ g_2 = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$



Считаем что E_k – совместное разбиение

$$0 \le g_1 + g_2 \le f\chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2 \le \int_A f$$

Перейдем к супремуму интегралов g_1, g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \le \int_A f$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ — индукция по n
3.
$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \sqcup B_n$$
, где
$$B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$$
$$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \ge \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

□

2.10 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Теорема Леви

Теорема 2.8 (Леви)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, f_n — измеримая
- $\forall n$ $0 \le f_n \le f_{n+1}$ почти везде
- $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ почти везде

Тогда $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Доказательство.

($\le$) очевидно. $f_n \le f$ почти везде $\int f_n \le \int f$

$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \int_e f_n = \int_{X\setminus e} f_n \le \int_{X\setminus e} f \le \int_X f$$

($\ge$) Достаточно $\forall g$ — ступенчатая $0 \le g \le f$

$$\lim \int_X f_n \ge \int_X g$$

Достаточно $\forall c \in (0,1)$

$$\lim \int_X f_n \ge c \int_X g$$

$$E_n := X(f_n \le cg) \quad \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$ т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \ge \int_{E_n} f_n \ge c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \ge c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \int_X g$
Последнее равентсво справедливо в силу непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

□

2.11 Линейность интеграла Лебега

Теорема 2.9. $f, g \geq 0$ измеримы на E
Тогда

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k},\ g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $f_n :\ 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots\ \lim f_n = f$
$g \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $g_n :\ 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots\ \lim g_n = g$

$$f_n + g_n \to f + g\ \ \int_E f_n + g_n \to \int_E f + g$$

$$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_E g = \int_E f + g$$

□

Следствие 2.9.5. f, g — суммируемы на E
Тогда $f + g$ — суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

2.12 Теорема об интегрировании положительных рядов. Следствие о рядах, сходящихся почти везде

Теорема 2.10 (об интегрировании положительных рядов)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая
- $u_n \geq 0$ почти везде

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. по т. Леви: $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$
$0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots\ S_n \to S$ — сумма ряда $\sum u_n$
Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$

$$\int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k \to \int_E S$$

□

Следствие 2.10.6. u_n — измеримые $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$
Тогда ряд $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. $S(x) := \sum |u_n(x)| \geq 0$ — измеримая

$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow S$ — суммируема $\Rightarrow S$ почти везде конечна □

2.13 Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 2.11 (об абсолютной непрерывности интеграла)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E$ — измеримое, $\mu E < \delta \quad |\int_E f| < \varepsilon$

Следствие 2.11.7.

- f — суммируемая
- $\mu E_n \to 0$

Тогда $\int_{E_n} f \to 0$

Доказательство. Возьмем множества $X_n := X(|f| \geq n)$, очевидно что $X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$, а также $\mu(\bigcap X_n) = 0$
Утверждение: $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ — это свойство непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, тода при $\mu E < \delta$

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f| \leq \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}^C} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

2.14 $\boxed{\#\mathrm{A}}$ Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

Теорема 2.12 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n\ |f_n| \leq g$ почти везде
  2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируема в силу 1, f — суммируема по следствию т. Рисса: $|f| \leq g$ почти везде
'тем более' $= \left|\int_X f_n - \int_X f\right| \leq \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$ фиксируем ε $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$
   $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \to 0$
   $$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$
   $$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^C} \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^C} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$
   По следствию т. об абсолютной непрерывности: $\int_{X_n} 2g \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
2. $\mu X = +\infty$
   Проверим утверждение: $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subset X$ — измеримое, μA — конечная: $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$
   $$\int_X g = \sup\{\int g_n,\ 0 \leq g_n \leq g,\ g_n \text{ — ступенчатая}\}$$
   $$A := \{x :\ g_n(x) > 0\}$$

— при достаточно больших n

$$0 \le \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \le \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} 2g$$

По 1 $\int_A |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\int_{X \setminus A} 2g < 2\varepsilon$
т.е. при больших n $\int_x |f_n - f| d\mu < 2\varepsilon$

□

2.15 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

Теорема 2.13 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n \ |f_n| \le g$ почти везде
  2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство.

$$h_n := \sup(|f_n - f|, \ |f_{n+1} - f|, \ \dots)$$

- $0 \le h_n \le 2g$
- h_n — монотонно убывает
- $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде

$2g - h_n \ge 0$ — эта последовательность возрастает, $2g - h_n \to 2g$ почти везде

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \le \int_X h_n \to 0$$

□

2.16 Теорема Фату. Следствия

Теорема 2.14 (Фату)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n \ge 0$ — измеримая
- $f_n \to f$ почти везде
- $c > 0 \ \forall n \ \int_X f_n \le c$

Тогда $\int_X f \le c$

Доказательство.

$$g_n := \inf(f_n,\ f_{n+1},\ \dots)$$

$$0 \le g_n \le g_{n+1}\ \ \lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ почти везде}$$

$$\int_X g_n \le \int_X f_n \le c$$

$$\int_X g_n \to \int_X f \Rightarrow \int_X f \le c$$

□

Следствие 2.14.8.

- $f_n, f \ge 0$ — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightrightarrows f$
- $\exists c > 0\ \forall n \int_X f_n \le c$

Тогда $\int_X f \le c$

Доказательство.

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists n_k\ f_{n_k} \to f \text{ почти везде}$$

□

Следствие 2.14.9.

- $f_n \ge 0$ — измеримые

Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство. Как в теореме:

$$\int_X g_n \le \int_X f_n$$

Выберем n_k:

$$\int_X f_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Рассмотрим первое неравенство для n_k:

$$\int_X g_{n_k} \le \int_X f_{n_k}$$

$$\int_X g_{n_k} \to \int_X \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int_X f_n$$

□

2.17 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

Теорема 2.15.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$
- ν — взвешенный образ меры μ при отображении Φ с весом ω
- $\omega \ge 0$ — измерима на X

Тогда $\forall f$ — измеримые на Y относительно $\mathfrak{B}$, $f \geq 0$
$f \circ \Phi$ — измеримая на X относительно $\mathfrak{A}$ и

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x)\, d\mu(x) \tag{2}$$

То же верно для суммируемых f

Доказательство. $f \circ \Phi$ — измеримая

1. Пусть $f = \mathcal{X}_B, B \in \mathfrak{B}$

$$f \circ \Phi(x) = f(\Phi(x)) = \left[\begin{array}{ll} 1 & ,\Phi(x) \in B \\ 0 & ,\Phi(x) \notin B \end{array} \right. = \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)}$$

   Тогда 2:

$$\nu B \stackrel{?}{=} \int_X \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

   — это определение ν

2. f — ступенчатая. 2 следует из линейности интеграла
3. $f \geq 0$ — измеримая: теорема об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми + т. Леви

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots, \ h_i \text{ — ступенчатая } h_i \leq f \ h_i \to f$$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow[i \to \infty]{} 2 \text{ для } f$$

4. f — измеримая $\Rightarrow$ для $|f|$ выполнено 2 $\Rightarrow$ $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ — суммируемы одновременно
   Берем f_+, f_-, для них интегралы конечные.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega$$

$\square$

2.18 Критерий плотности

Теорема 2.16 (критерий плотности)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, ν — еще одна мера
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая

Тогда ω — плотность ν отнсительно μ $\Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathfrak{A} \ \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A \omega$$

Доказательство критерия плотности.

($\Rightarrow$) очевидно

($\Leftarrow$) Не умаляя общности $\omega > 0 : e = X(\omega = 0)$
$\nu(e) = \int_e \omega d\mu = 0$
Для случая когда $A \cap e = \emptyset$ все только лучше
Фиксируем $q \in (0, 1)$
$A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$

q^{-1} q^{-2}
0 q^2 q $1 = q^0$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \le \nu A_j \le \mu A_i \cdot q^{j-1} \tag{3}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \le \int_{A_j} \omega d\mu \le \mu A_j \cdot q^{j-1} \tag{4}$$

Тогда

$$q \cdot \int_A \omega d\mu \le q \cdot \sum \int_{A_j} \le \sum q^j \mu A_j \le \sum \nu A_j \le \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \le \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} = \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

то есть:

$$q \int_A \omega \, d\mu \le \nu A \le \frac{1}{q} \int_A \omega \, d\mu$$

и $q \to 1 - 0$

□

2.19 Лемма о единственности плотности

Лемма 3.

- f, g — *суммируемые*
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\forall A \in \mathfrak{A}$: $\int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ *почти везде*

Доказательство. $h := f - g$
Дано $\forall A \int_A h = 0$
Доказать $h = 0$ почти везде

- $A_+ := X(h \ge 0)$
- $A_- := X(h < 0)$

$X = A_+ \sqcup A_-$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$$

$$\int_{A_-} |h| = -\int_{A_-} h = 0$$

тогда

$$\int_X |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ почти везде □

2.20 Лемма об оценке мер образов малых кубов

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек)**.**

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $a \in O$
- $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$

Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \ne 0$
Тогда $\exists \delta > 0 \ \forall$ *куба* $Q \subset B(a, \delta),\ a \in Q$
выполняется неравенство $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L \cdot (x-a) + o(x-a) \quad x \to a$$
$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o(x-a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар} B_\varepsilon(a)\ \forall x \in B_\varepsilon(a)\ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a) a \in Q$ — куб со стороной h. При $x \in Q: \ |x-a| \le \sqrt{m}h$

$$|\Psi(x) - x| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a| \le \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1+2\varepsilon)h$: при $x, y \in Q$

$$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \le |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \le |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \le (1+2\varepsilon)h$$
$$\lambda(\Psi(Q)) \le (1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \le \underbrace{|\det L| \cdot (1+2\varepsilon)^m}_{\text{выбираем } \varepsilon \text{ чтобы } \ldots < c} \lambda Q$$

потом берем $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ □

2.21 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

Лемма 5.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $f : O \to \mathbb{R}$ — *непрерывное*
- $Q \subset \overline{Q} \subset O$ — *кубическая ячейка*
- $A \subset Q$

Тогда

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — открытое } \subset O}} \left(\lambda(G) \sup_G f\right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Теорема 2.17.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \in O$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)|\, d\lambda(x)$$

Доказательство. Обозначим якобиан $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
$\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера. Т.е. надо доказать: J_Φ — плотность ν относительно λ. Тогда достаточно проверить условие критерия плотности

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \le \nu A \le \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5}$$

Достаточно проверить только правое неравенство. левое — это "правое для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1}"

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \le \lambda A$$

1. Проверяем второе неравенство 5 для случая когда A — кубическая ячейка. $A \subset \overline{A} \subset O$. От противного:
$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$$
Возьмем $C > \sup_Q J_\Phi :\ C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$. Запускаем процесс половинного деления:
Режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую"ячейку $Q_1 \subset Q :\ C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берем $Q_2 :\ C \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и так далее
$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{6}$$
$$a \in \bigcap \overline{Q_i} \quad C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi, \text{ в частности } C > |\det \Phi'(a)|$$
Получаем противоречие с леммой: в сколь угодно малой окрестности a имеются кубы $\overline{Q_n}$, где выполняется 6. **Противоречие**

2. Проверим второе неравенство 5 для открытых множеств $A \subset O$
Это очевидно $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q_j} \subset A$
$$\nu A = \sum \lambda Q_j \le \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \le \sup_A J_\Phi \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{7}$$

3. По лемме второе неравенство 5 выполнено для всех измеримых A
$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \overline{Q_j} \subset O$$
$$A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j} \quad A_j \subset G \text{ — открытое}$$
$$\nu A_j \le \nu G \le \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \le \inf_{\substack{A_j \subset G \\ G \text{ — откр.}}} (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично 7 получаем $\nu A \le \sup_A f \cdot \lambda A$ □

2.22 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

Теорема 2.18.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall f$ — измеримых, ≥ 0, заданных на $O' = \Phi(O)$
$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda$$
, где $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$. То же верно для суммируемых функций f

Доказательство. Применяем теорему о взвешенном образе меры.
Дано:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(T, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$ — с сохранением измеримости
- $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$
- $\omega : Y \to \mathbb{R},\ \ge 0$, измеримый
- ν — взвешенный образ μ с весом ω:
$$\mu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Тогда
$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega(x) d\mu$$
В нашем случае

- $X = Y = \mathbb{R}^m$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$
- Φ — диффеоморфизм
- $\mu = \lambda$
- $\nu(A) = \lambda\Phi(A)$

Под действием гладкого отображния Φ, σ-аглебра $\mathfrak{M}^m$ сохраняется
По теореме
$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(A)} J_\Phi d\lambda$$
т.е. λ — взвешенный образ исходной меры Лебега по отношению к Φ □

2.23 Теорема о произведении мер

Теорема 2.19.

1. m_0 — мера на $\mathcal{P}$
2. ν, μ — σ-конечные $\Rightarrow m_0$ — тоже σ-конечная

Доказательство.

1. $?m_0$ — счетно аддитивна $?m_0 P = \sum m_o P_k$, если
$$A \times B = P = \bigsqcup P_k, \text{ где } P_k = A_k \times B_k$$
Наблюдение: $\mathcal{X}_{A\times B}(x, y) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(y)$
Тогда $\mathcal{X}_P = \sum \mathcal{X}_{P_k}$, т.е.
$$\forall x \in X, y \in Y \quad \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y) = \sum \mathcal{X}_{A_k}(x)\mathcal{X}_{B_k}(y)$$
проинтегрируем по y по мере ν:
$$\mathcal{X}_A(x)\nu B = \sum \mathcal{X}_A(x) \cdot \nu B_k$$
Интегрируем по x:
$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$$
2. Очев. μ — σ-конечная $\Rightarrow X = \bigcup X_k$, μX_k — конечная ν — σ-конечная $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n$, νY_k — конечная
$$X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n \quad m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n \text{ — конечная}$$
$\Rightarrow m_0$ — σ-конечная мера

□

2.24 Принцип Кавальери

Определение.

- X, Y — множества
- $C \subset X \times Y$

$$C_x := \{y \in Y | (x, y) \in C\}$$
$$C^y := \{x \in X | (x, y) \in C\}$$

Теорема 2.20 (Кавальери)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- ν, μ — σ-конечные, полные
- $m := \mu \times \nu$

Пусть $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$
Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая[1] функция на X
3. $mC = \int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y

Доказательство. $\mathcal{D}$ — система множеств, для которых выполнено 1. - 3.

1. $C = A \times B \Rightarrow C \in \mathcal{D}$
   (a) $C_x = \begin{bmatrix} \emptyset & x \notin A \\ B & x \in A \end{bmatrix}$
   (b) $x \mapsto \nu(C_x)$ — это функция $\nu B \cdot \mathcal{X}_A$
   (c) $\int \nu(C_x) d\mu = \int\limits_X \nu B \cdot \mathcal{X}_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in \mathcal{D}$ — дизъюнктны $\Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathcal{D}$
   $E_i \in \mathcal{D} \Rightarrow (E_i)_x$ — измеримое почти везде $\Rightarrow$ при почти всех x все $(E_i)_x$ – измеримые
   (a) Тогда при этих x $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$
   (b) $\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\text{измеримая функция}} \Rightarrow$ функция $x \mapsto \nu E_x$ измеримая[1]
   (c)
   $$\int\limits_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int\limits_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE$$
3. $E_i \in \mathcal{D},\ E_1 \supset E_2 \supset \dots,\ E = \bigcap\limits_i E_i,\ \mu E_i < +\infty$ Тогда $E \in \mathcal{D}$
   $$\int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — конечная при почти всех } x$$
   (a) $\forall x$ верно $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots,\ E_x = \bigcap (E_i)_x$. Тогда E_x — измеримое при почти всех x и $\lim\limits_{i \to +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при почти всех x
   (b) Таким образом $x \mapsto \nu E_x$ — измеримая[1]
   (c)
   $$\int\limits_X \nu E_x d\mu = \lim \int \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$$
   Первое равенство по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — из[1]

Итог: $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathcal{D}$

[1] функция задана при почти всех x. Она равна почти везде некоторой измеримой функции, которая задана на всем X. Это "не мешает" утверждению 3

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$
$$mE = \inf\left\{\sum m_0 P_k | E \subset \bigcup P_k,\ P_k \in \mathcal{P}\right\}$$
— теорема о лебеговском продолжении.
$\exists$ множества H вида $\bigcap\limits_l \bigcup\limits_k P_{kl}$ (т.е. $H \in \mathcal{D}$)
$E \subset H, mH = mE = 0$
$$0 = mH = \int\limits_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x \sim 0 \text{ (} = 0 \text{ при почти всех } x\text{)}$$
$E_x \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow$
   (a) E_x — измерима при почти всех x
   (b) $\nu E_x = 0$ почти везде
   (c) $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$
5. C — m-измеримо, $mC < +\infty$ тогда $C \in \mathcal{D}$
$C = H \setminus e$, где H — вида $\bigcap\limits_l \bigcup\limits_k P_{kl},\ me = 0,\ mC = mH$
   (a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — измерима при почти всех x, т.к. ν — полная
   (b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x \Rightarrow$ измерима
   (c) $\int\limits_X \nu C_x d\mu = \int\limits_X \nu H_x d\mu = mH = mC$
6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathcal{D}$
$$X = \bigsqcup X_k,\ \mu X_k < +\infty,\ Y = \bigsqcup Y_j,\ \nu Y_j < +\infty$$
$$C = \bigsqcup (C \cap (X_k \times Y_j)) \text{ — используем 2.}$$

□

2.25 Теорема Тонелли

Теорема 2.21 (Тонелли)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечные меры, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ — измерима относительно $A \otimes B$

Тогда

1. при почти всех x f_x — измеримая на Y f^y — измерима на X почти везде
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x d\nu = \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y)$ — измеримая* на X
$y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f^y d\mu$ — измеримая* на Y
3. $\int\limits_{X \times Y} f\, dm = \int\limits_X \varphi d\mu = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$
$= \int\limits_Y \psi d\nu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu(x)\right) d\nu(y)$

Доказательство.

1. Пусть $f = \mathcal{X}_C$, $C \subset X \times Y$ — измеримо относительно m. Тогда $f_x(y) = \mathcal{X}_{C_x}(y)$. C_x — измеримо при почти всех $x \implies f_x$ — измерима при почти всех x
$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$$
$\varphi(x)$ — измерима (по принципу Кавальери)
$$\int_X \varphi(x)d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \xlongequal[\text{пр. Кавальери}]{} mC = \int_{X\times Y} fdm$$
2. f — ступенчатая, ≥ 0
$$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{C_k} \quad f_x = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{(C_k)_x}$$
f_x — измерима при почти всех x
$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x$$
$$\int_X \varphi(x) = \sum \alpha_k \int_X \nu(C_k)_x = \sum \alpha_k mC_k = \int_{X\times Y} fdm$$
3. $f \geq 0$ — измеримая. $f = \lim g_n$ ($f(x,y) = \lim g_n(x,y)$ при всех (x,y)), где g_n возврасатют, $g_n \geq 0$, g_n — ступенчатые
$$f_x = \lim_{n\to+\infty} (g_n)_x$$
$\implies f_x$ — измеримая на Y
$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)}$$
— верно т.к. $(g_n)_x \leq (g_{n+1})_x$. $\varphi_n(x)$ — измерима $\implies \varphi$ — измерима*
Заметим что $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \dots$ почти везде
$$\int_X \varphi(x) \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X\times Y} g_n \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \int_{X\times Y} fdm$$

□

2.26 Формула для Бета-функции

Пример.
$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx \quad s,t > 0$$
Тогда
$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$$

Доказательство.
$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}dy\right)dx =$$
$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{s-1}y^{t-1}e^{-x}e^{-y}dy\right)dx \xlongequal[y=u-x]{} \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}du\right)dx =$$
$$= \int_{\dots} \dots d\lambda_2 = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^u x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}dx\right)du =$$
$$\xlongequal[x=u\cdot v]{} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 (uv)^{s-1}(u-uv)^{t-1}e^{-u}\cdot u\,dx\right)du =$$
$$= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1}e^{-u}\left(\int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,dv\right)du = B(s,t)\Gamma(s+t)$$

□

2.27 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

Пример. Объем(мера) шара в $\mathbb{R}^m$.

$$\alpha_m = \lambda_m(B(0,1)) \quad \lambda_m(B(0,r)) = r^m \cdot \alpha_m$$

$$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^m \big| x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\}$$

$$B(0,1)_{x_m} = \{x \in \mathbb{R}^{m-1} \big| x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 \leq 1 - x_m^2\}$$

$$\alpha_m = \int_{-1}^{1} \lambda_{m-1}(B(0, \sqrt{1-y^2}))dy = \int_{-1}^{1} \alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{m-1}{2}}dy =$$

$$= 2\alpha_{m-1}\int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\alpha_{m-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\alpha_{m-1}$$

$$\alpha_m = \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \cdot \dots \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}}_{m-1} \cdot \underbrace{\alpha_1}_{2} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \cdot 2 =$$

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

$m = 3$:

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{4}{3}\pi$$

2.28 Формула Грина

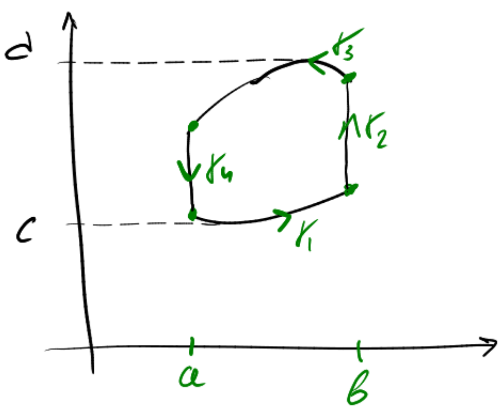
Теорема 2.22.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное, ограниченное
- D — ограничено кусочно гладкой кривой ∂D
- Пусть граница области D ∂D ориентированна, согласована с ориентацией D (против часовой стрелки) — обозначим ∂D^+
- (P, Q) — гладкое векторное поле в окрестности D

Тогда

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем D — ‘криволинейный 4-х угольник‘



∂D — состоит из путей $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, где γ_2, γ_4 — вертикальные отрезки (возможно вырожденнные), γ_1, γ_3 — гладкие кривые(можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$). Аналогично можно описать границу по отношнию к оси Oy. Проверим, что:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy$$

Левая часть:

$$-\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x))\,dx$$

Правая часть:

$$\int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{0} + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_{0} =$$

$$= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, \varphi_3(x))\,dx$$

□

2.29 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Формула Стокса

Теорема 2.23 (Формула Стокса)**.**

- Ω — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ (двустороннее)
- n_0 — сторона Ω
- $\partial\Omega$ — кусочно гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$ — ориентированная кривая с согласованной ориентацией.
- (P, Q, R) — гладкое векторное поле в окрестности Ω

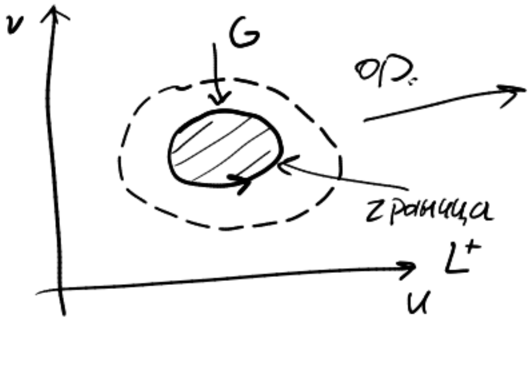
Тогда

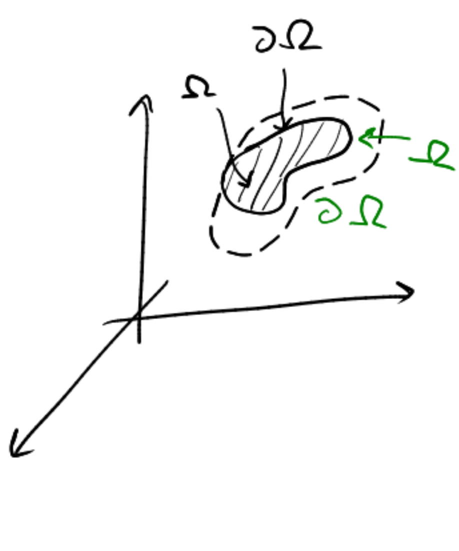
$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\Omega \in C^2$. Достаточно?:

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$\Phi = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$





$dx\,dy = -dy\,dx,\ dx\,dx = 0$

$$dP\,dx + dQ\,dy + dR\,dz = (P'_x\,dx + P'_y\,dy + P'_z\,dz)\,dx + \dots$$

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \int_{L^+} P \cdot (\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv) \tag{8}$$

Параметризируем: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma = (u(t), v(t))$ — параметризируем L^+

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \int_a^b P(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v')dt \tag{9}$$

$\Phi \circ \gamma$ — парметризируем $\partial\Omega^+$, $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$9 = \int_a^b P \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\,du + P \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\,dv$$

$$8 = \iint_G \frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\,du\,dv =$$

$$= \iint_G (P'_x \cdot x'_u + P'_y \cdot y'_u + P'_z \cdot z'_u)x'_v + p \cdot x''_{uv} - (P'_x \cdot x'_v + P'_y \cdot y'_v + P'_z \cdot z'_v)x'_u - P \cdot x''_{uv}\,du\,dv =$$

$$= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y}(x'_u y'_v - x'_v y'_u) = \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy$$

□

2.30 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Формула Гаусса–Остроградского

Теорема 2.24 (Формула Остроградского)**.**

- $V = \{(x,y,z) \big| (x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \le z \le F(x,y)\}$
- G — компактно
- ∂G — кусочно гладкая
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- R: окр.$(V) \to \mathbb{R}, \in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V} R\,dx\,dy = \iint_{\partial V} 0\,dy\,dz + 0\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

Доказательство.

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} = \iint_G dx\,dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint_G R(x,y,F(x,y))\,dx\,dy - \iint_G R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\Omega_F} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_f} R\,dx\,dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R\,dx\,dy}_{0}$$

□

Следствие 2.24.10 (обобщение формулы Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

2.31 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

Теорема 2.25 (Пуанкаре').

- Ω — открытый паралеллепипед
- A — векторное поле в Ω, $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

Доказательство.

($\Rightarrow$) $\operatorname{div}\operatorname{rot} B = 0$

($\Leftarrow$) Дано:

$$A_1{}'_x + A_2{}'_y + A_3{}'_z = 0 \tag{10}$$

. Найдем векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, $A = \operatorname{rot} B$. Путь $B_3 \equiv 0$

$$\left.\begin{array}{r} B_3{}'_y - B_2{}'_z = A_1 \\ B_1{}'_z - B_3{}'_x = A_2 \\ B_2{}'_x - B_1{}'_y = A_3 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{rl} -B_2{}'_z = A_1 & (1) \\ B_1{}'_z = A_2 & (2) \\ B_2{}'_x - B_1{}'_y = A_3 & (3) \end{array}$$

(1)

$$B_2 \coloneqq -\int_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x, y)$$

(2)

$$B_1 \coloneqq \int_{z_0}^{z} A_2 dz$$

(3)

$$-\int_{z_0}^{z} A_1{}'_x\, dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^{z} A_z{}'_y\, dz = A_3 \underset{10}{\Longrightarrow} \int_{z_0}^{z} A_3{}'_z dz + \varphi'_x = A_3$$

$$A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x = A_3(x, y, z) \Leftrightarrow \varphi'_x = A_3(x, y, z_0)$$

Отсюда найдем $\varphi = \int_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0)\, dx$

□

2.32 Теорема о вложении пространств L^p

Теорема 2.26.

- $\mu E < +\infty$, $1 \le s < r \le +\infty$

Тогда

1. $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2. $\|f\|_s \le \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

Доказательство.

1. Следует из 2)
2. $r = \infty$

$$\left(\int |f|^s\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \le \operatorname{ess\,sup} |f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

$r < +\infty$ $p := \frac{r}{s}$, $q = \frac{r}{r-s}$

$$\|f\|_s^s = \int_E |f|^s\, d\mu = \int_E |f|^s \cdot 1\, d\mu \le \left(\int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}}\, d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}}\, d\mu\right)^{\frac{r-s}{r}} \le$$

$$\le \|f\|_r^s \mu E^{1 - \frac{s}{r}}$$

□

2.33 Теорема о сходимости в L^p и по мере

Теорема 2.27 (о сходимости в L^p и по мере)**.**

- $1 \le p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1. $f \in L^p$, $f_n \to f$ в $L^p \implies f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$
2. $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$ (либо $f_n \to f$ почти везде), $|f_n| \le g$, $g \in L^p$
   Тогда $f \in L^p$ и $f_n \to f$ в L^p

Доказательство.

1. $X_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \ge \varepsilon)$
$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p \, d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \to 0$$
2. $f_n \Rightarrow f$, $\exists n_k$ $f_{n_k} \to f$ почти везде $\implies$ $|f| \le g$ почти везде
   $|f_n - f|^p \le (2g)^p$ — суммируема (так как $g \in L^p$)
$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow[\text{т. Лебега}]{} 0$$

$\square$

2.34 Полнота L^p

Теорема 2.28.

- $L^p(X, \mu)$ — полное
- $1 \le p < +\infty$

Доказательство. f_n — фундаментальная
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \; \exists N_1 \; \forall n_1, k > N_1 \quad \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$$
Возьмем один такой n_1 и зафиксируем:
$$\varepsilon = \frac{1}{4} \; \exists N_2 > n_1 \; \forall n_2, k > N_2 \quad \|f_{n_2} - f_k\|_p < \frac{1}{4}$$
Повторим это действие. Получим последовательность (n_k):
$$\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$
Рассмотрим ряд:
$$S(x) = \sum_k |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad S(x) \in [0, +\infty]$$
S_N — частичные суммы ряда S
$$\|S_N\|_p \le \sum_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$
, т.е. $\int_X S_N^p < 1$, по теореме Фату: $\int_X S^p \, d\mu < 1$, т.е. S^p — суммируема $\implies$ S — почти везде конечна
$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

— его частичные суммы — это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. схоимость этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \to f$ почти везде. Проверим, что $\|f_n - f\|_p \to 0$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берем $m = n_k > N$

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p \, d\mu < \varepsilon^p$$

это выполняется при всех больших k. По теореме Фату:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$$

, т.е. $\|f_n - f\| < \varepsilon$ □

2.35 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Лемма 6.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \le p \le +\infty$

Множество ступенчатых функций (из L^p) плотно в L^p

Доказательство.

$p = \infty$ $f \in L^\infty$, изменив f на множестве C меры 0, считаем, что $|f| \le \|f\|_\infty$. Тогда существуют ступенчатые $0 \le \varphi_n \rightrightarrows f^+$, $0 \le \psi_n \rightrightarrows f^-$. Тогда сколько угодно близко к f можно найти ступенчатую фкнцию вида $\varphi_n + \psi_n$

$p < +\infty$ Пусть $f \ge 0$. $\exists \varphi_n \ge 0$ — ступенчатая: $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p \to 0$$

, по теореме Лебега. f — любого знака: берем $f^+, f^-, \dots$

□

2.36 Лемма Урысона

Лемма 7 (Урысона)**.**

- X *— нормальное*
- $F_0, F_1 \subset X$ *— замкнутые,* $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R}$ *— непрерывная,* $0 \le f \le 1$, $f\big|_{F_0} = 0$, $f\big|_{F_1} = 1$

Доказательство. Перефразируем нормальность: Если $\underset{\text{замк.}}{F} \subset \underset{\text{октр.}}{G}$, то $\exists U(F)$ — открытое:

$$F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$$

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^C \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^C}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$\overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}} \subset G_1$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}$, $G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом для любого двоично рационального числа $\alpha \in [0, 1]$ найдется множество G_α

$$f(x) \coloneqq \inf\{\alpha \text{ — двоично рациональное} \big| x \in G_\alpha\}$$

Проверим что: f — непрерывно $\Leftrightarrow f^{-1}(a, b)$ — всегда открыто. Достаточно проверить:

1. $\forall b\ f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a\ f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

Покажем это:

1. $$f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q<b \\ q \text{ — дв. рац.}}} G_q \text{ — открыто}$$

   (⊃) Очевидно: При $x \in G_q$ $f(x) \le q - b$

   (⊂) $f(x) = b_0 < b$ Возьмем $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

2. $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q>a} G_q = \bigcap_{q>a} \overline{G_q}$ — замкнуто

   (⊃) Тривиально

   (⊂) q, r — двоично рациональные

$$\bigcap_{\substack{q>a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

□

2.37 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

Определение. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — **финитная**, если $\exists B(0, r) : f \equiv 0$ вне $B(0, r)$.
$C_0(\mathbb{R}^m)$ — непрерывные финитные функции. $\forall p \ge 1\ C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Теорема 2.29.

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_\mathfrak{M})$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^p(E, \lambda_\mathfrak{M})$, $1 \le p < +\infty$ множество непрерывных финитных функций плотно

Доказательство. Ступенчатые функции плотны в $L^p(E, \lambda_\mathfrak{M})$. Достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0\ \forall A \subset E$ — ограниченного, $\exists f$ — финитная непрерывная: $\|f - \mathcal{X}_A\|_p < \varepsilon$.
Как потсроить для $\forall h \in L^p$ финитную непрерывную f: $\|h - f\|_p < \varepsilon$? $\exists g$ — ступенчатая:

$$g = \sum_{\text{кон.}} a_k \mathcal{X}_{A_k} \quad \|h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

Подберем f_k: $\|f_k - \mathcal{X}_{A_k}\| < \frac{\varepsilon}{\sum |a_i| \cdot 2}$

$$\|h - f\|_p \le \|h - g\| + \|g - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum |a_k| \|\mathcal{X}_{a_k} - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{\text{замкн.}}{F} \subset A \subset \underset{\text{откр.}}{G} \quad \lambda_\mathfrak{M}(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона $\exists f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывная: $f\Big|_F \equiv 1$, $f\Big|_{G^C} \equiv 0$

$$\|f - \mathcal{X}_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \mathcal{X}_A|^p\, d\lambda_\mathfrak{M} = \int_{G \setminus F} |f - \mathcal{X}_A|^p \le 1 \cdot \lambda_\mathfrak{M}(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

2.38 $\boxed{\#\text{A}}$ Теорема о непрерывности сдвига

Примечание. Соглашение: $L^p[0,T],\ T \in \mathbb{R}$ — это пространство можно понимать как пространство T-периодических функций

$$\forall x f(x) = f(x+T)$$

- $\tilde{f}$ — представитель $\tilde{f}_1$ — еще один
- $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x+T)$ почти везде

Удобство: $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$

$$C[a,b]\ \|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

$\tilde{C}[0,T]$ — непрерывные T-периодические функции

- $f \in C[0,T],\ f \in \tilde{C}[0,T] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} f$ — равномерно непрерывна
- в $L^p[0,T]$ функции из $\tilde{C}$ образуют плотное множество

Определение.

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) \coloneqq f(x+h)$ — **Сдвиг**

Теорема 2.30 (о непрерывности сдвига)**.**

1. f — равномерно непрерывна.
   Тогда $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$,
   т.е. $\sup_x |f(x+h) - f(x)| \to 0$
2. $f \in L^p(\mathbb{R}^m),\ 1 \le p < +\infty$
   Тогда $\|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
3. $f \in \tilde{C}[0,T]$
   Тогда $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
4. $1 \le p < +\infty,\ f \in L^p[0,T]$
   Тогда $\|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Доказательство.

2), 4) $\forall \varepsilon > 0\ \forall f \in L^p[0,T]\ \exists g$ — непрерывная

$$\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда g — равномерно непрерывна

$$\|f_h - f\|_p \le \|f-g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \le \frac{\varepsilon}{3} + \|g-g_h\|_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

4)

$$\|g_h - g\|_p = \left(\int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\|g_h - g\|_\infty^p \cdot \int_0^T 1\,dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= T^{\frac{1}{p}} \cdot \|g_h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

2) g — финитная, $\sup g \in B(0,R)$ Пусть $|h| < 1$

$$\|g_h - g\|_p \le \|g_h - g\|_{L^p(B(0,R+1),\lambda_m)} \le \|g_h - g\|_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

□

2.39 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

Свойство 1. $x_n \to x,\ y_n \to y$ *в* $\mathcal{H}$
Тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

Доказательство.

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le$$
$$\le \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$$

□

Свойство 2. $\sum x_k$ *— сходится*
Тогда $\forall y \in \mathcal{H}\ \langle \sum x_k, y\rangle = \sum \langle x_k, y\rangle$

Доказательство.

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$$
$$\langle S_N, y\rangle \to \langle S, y\rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle$$
$$\langle S_N, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y\rangle$$

— это частичные сумма ряда из правой части □

Свойство 3. $\sum x_k$ *— ортогональный ряд*
Тогда $\sum x_k$ *— сходится* $\Leftrightarrow \sum \|x_k\|^2$ *— сходится*

Доказательство. $S_N = \sum_{k=1}^N x_k$

$$\|S_N\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{N} x_k, \sum_{j=1}^{N} x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j\rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle x_k, x_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2$$

$\Rightarrow$ S_N — фундаментальная $\implies$ S_N — фундаментальная в $\mathcal{H}$

$\Leftarrow$ S_N — сходится в $\mathcal{H}$

□

2.40 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

Теорема 2.31.

- $\{e_k\}$ — О.С. в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Тогда

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З
2. $c_k := \frac{\langle x, e_k\rangle}{\|e_k\|^2}$
3. $c_k e_k$ — это проекция x на прямую $\{te_k,\ t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$
   $x = c_k e_k + z,\ z \perp e_k$

Доказательство.

1. $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$
   $\alpha_n \|e_n\|^2 = 0 \implies \alpha_n = 0$
2. $$\langle x, e_k\rangle = \sum \langle c_j e_j, e_k\rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2$$
3. $$\langle z, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle c_k e_k, e_k\rangle = 0$$

□

2.41 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Теорема 2.32 (о свойствах частичных сумм ряда Фурье)**.**

- $\{e_k\}$ — ОС в H
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} c_k(x) e_k \in \mathcal{L}_n = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$$

<u>Тогда</u>

Свойство 1. *S_n — проекция x на $\mathcal{L}_n$, т.е. $x = S_n + z \implies z \perp \mathcal{L}_n$*

Доказательство. $k = 1, \ldots, n$

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) \left\| e_k \right\|^2 = 0$$

□

Свойство 2. *S_n — элемент наилучшего приближения для x в $\mathcal{L}_n$*

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$$

Доказательство. $x = S_n + z$

$$\|x - y\|^2 = \| \underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n} \| = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

□

Свойство 3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Доказательство.

$$\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$$

□

Следствие 2.32.11 (Неравенство Бесселя)*.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

2.42 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

Теорема 2.33 (Рисс, Фишер)**.**

- $\{e_k\}$ — ОС в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

<u>Тогда</u>

1. ряд Фурье вектора x сходится в $\mathcal{H}$
2. $$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z \quad z \perp e_k, \ \forall k$$
3. $$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \Leftrightarrow \sum |c_k(x)|^2 \left\| e_k \right\|^2 = \|x\|^2$$

Доказательство.

1. Ряд Фурье — ортогональный ряд. Сходимость ряда Фурье $\Leftrightarrow$ сходимость
$$\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$$
Это выполняется по неравенству Бесселя

2. $z = x - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$
$$\langle z, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle - \sum c_k(x)\langle e_k, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle - c_n(x)\|e_n\|^2 = 0$$

3. $(\Rightarrow)$ Теорема 1.3?
$(\Leftarrow)$ из п.2 $\|x\|^2 = \|\sum c_k(x)e_k\| + \|z\|^2 \implies \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$
Дано:
$$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\| \implies z = 0 \implies x = \sum c_k(x)e_k$$

□

2.43 Теорема о характеристике базиса

Теорема 2.34 (о характеристике базиса)**.** $\{e_k\}$ — ОС в $\mathcal{H}$. Тогда эквивалентны

1. $\{e_k\}$ — базис
2. $\forall x, y$ — выполняется обобщенное уравнение замкнутости
$$\langle x, y\rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$
3. $\{e_k\}$ — замкнута
4. $\{e_k\}$ — полная
5. $\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots)$ — плотна в $\mathcal{H}$, т.е. $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots) = \mathcal{H}$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \quad 4 \Leftrightarrow 5$

$(1 \Rightarrow 2)$ Берем $x = \sum c_k(x)e_k$ и скалярное умножаем на y:
$$\langle e_k, y\rangle = \overline{\langle y, e_k\rangle} = \overline{c_k(y) \cdot \|e_k\|^2} = \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$
$$\langle x, y\rangle = \dots$$

$(2 \Rightarrow 3)$ $y \coloneqq x$ в обобщенное уравнение

$(3 \Rightarrow 4)$ $\exists z : \forall n \ \langle z, e_n\rangle = 0$?, т.е. $c_n(z) = 0$
Для этого z уравнение замыкания $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \|e_k\|^2 = 0$

$(4 \Rightarrow 1)$ по теореме Рисса-Фишера $x = \sum c_k(x)e_k + z$, где $\forall k : \ z \perp e_k$. В силу полноты ОС $z = 0$

$(4 \Rightarrow 5)$ $\mathcal{L} \coloneqq \mathrm{Cl}\,\mathrm{Lin}\{e_k\}$. Надо проверить $\mathcal{L} = \mathcal{H}$.
Если $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, то по теореме Рисса-Фишера как в предыдущем пункте $z = 0$, т.е. $x \in \mathcal{L}$

$(5 \Rightarrow 4)$ Если $z \perp$ всем $e_k \implies z \perp \mathrm{Lin}\{e_k\} z \perp \mathcal{L}$, но $\mathcal{L} = \mathcal{H} \implies z \perp z$, т.е. $\langle z, z\rangle = 0$

□

2.44 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Лемма 8. *Дан тригонометрический ряд(вещественный или комплексный). Пусть $S_n \to f$ в $L^1[-\pi, \pi]$ ($\|S_n - f\|_1 = \int_{[-\pi,\pi]} |S_n - f| \to 0$)*
Тогда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

или

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt$$

Доказательство. Докажем для a_k. Пусть $n \geq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos kt \, dt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kt \, dt = \pi a_k$$

При $k = 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cdot 1 = \pi a_0$

$$\left| \pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(t) - f(t)) \cos kt \, dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| \, dt = \|S_n - f\|_1 \to 0$$

□

2.45 Теорема Римана–Лебега

Теорема 2.35 (Римана-Лебега)**.**

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\int_E f(t) e^{i\lambda t} \, dt \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

$$\int_E f(t) \cos \lambda t \to 0$$

$$\int_E f(t) \sin \lambda t \to 0$$

В частности $f \in L^1[-\pi, \pi]$ $a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

Доказательство. н.у.о $E = \mathbb{R}$ [пусть $f = 0$ на E]

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} \, dt = \left| \; t = \tau + \tfrac{\pi}{\lambda} \; \right. = -\int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{\lambda}) e^{i\lambda\tau} \, d\tau$$

Значит

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} \, dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} \, dt$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} \, dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| \cdot |e^{i\lambda t}| \, dt \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

По Лемме о непрерывности сдвига □

2.46 Три следствия об оценке коэффициентов Фурье

Следствие 2.35.12. Пусть

$$\omega(f,h) = \sup_{\substack{x,y\in E\\ |x-y|\le h}} |f(x)-f(y)|$$

— модуль непрерывности Если $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \le \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)$

Доказательство.

$$|2c_{-k}(f)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{k}\right)\right|\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)\,dt = \omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)$$

□

Следствие 2.35.13.

- $E \subset \mathbb{R}$, $E = \langle a,b\rangle$

Класс Липшица: $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1]$

$$\operatorname*{Lip}_M \alpha(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \forall x,y\ |f(x)-f(y)| \le M|x-y|^\alpha\}$$

Пусть $f \in \mathrm{Lip}_M\alpha$, тогда при $k \ne 0$

$$|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \le \frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$$

Доказательство. $f \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha \implies \omega(f,h) \le Mh^\alpha$. □

Следствие 2.35.14.

1. $f \in \tilde{C}^{(r)}[-\pi,\pi]$
   <u>Тогда</u> $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |c_k(f)| \le \frac{const}{|k|^r}$

2. $f \in \tilde{C}^{(r)}$, $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$, $0 < \alpha \le 1$
   <u>Тогда</u> $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \le \frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$

Доказательство. Проведем эксперимент, после которого доказательство станет очевидным $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$, тогда при $k \ne 0$

$$a_k(f') = kb_k(f)$$

$$b_k(f') = -ka_k(f)$$

$$c_k(f') = ikc_k(f)$$

— интегрирование по частям

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(f(t)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot ik\cdot e^{ikt}\,dt\right)$$

□

2.47 Принцип локализации Римана

Теорема 2.36 (принцип локализации Римана)**.**

- $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) = g(x)$

Тогда Ряды Фурье f и g ведут себя одинаково в точке x_0:

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Примечание. Переформулировка:

- $h \coloneqq f - g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $h \equiv 0$ на $x_0 - \delta, x_0 + \delta$

Тогда $S_n(h, x_0) \to 0$

Доказательство.

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t)(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt)\, dt = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где

$$h_1(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t)$$

Это рассуждение верно если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$

- Для h_2 — очевидно
- Для h_1: $h_1 \equiv 0$ при $t \in (-\delta, \delta)$

$$|h_1(t)| \leq |h(x_0 + t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \in L^1$$

Тогда $b_n(h_1) \to 0,\ a_n(h_2) \to 0$ по теореме Римана-Лебега

□

2.48 $\boxed{\#\mathbf{A}}$ Признак Дини. Следствия

Теорема 2.37 (признак Дини)**.**

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

Пусть

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)|}{t}\, dt < +\infty \tag{11}$$

Тогда ряд Фурье f сходится к S в точке x_0, т.е. $S_n(f, x_0) \to S$

Доказательство.

$$\varphi(t) \coloneqq f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t) \quad \varphi(t) \in L^1$$

$$S_n(f, x_0) - S = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t)\, dt = \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0} \dots =$$

$$= \int_0^{\pi} \varphi(t) D_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \varphi(t) \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2} & t \in [0, \pi] \end{bmatrix} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t) & t \in [0, \pi] \end{bmatrix}$$

Доказываемое утверждение следует из теоремы Римана-Лебега, если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$
$h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$? — да, по формуле 11

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t} \quad \frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_1| = \int_0^{\pi} |h_1| = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg}\frac{t}{2} < \int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$$

— по 11 □

Следствие 2.37.15.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$

Пусть существует четыре конечных предела: $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$

$$\alpha_\pm \coloneqq \lim_{t \to \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$$

Тогда ряд Фурье f в точке x_0 сходится к $S = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Доказательство.

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \xrightarrow[t \to +0]{} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е. $\frac{\varphi(t)}{t}$ — ограничена вблизи 0 на $[0, \pi]$ $\implies$ по замечанию 1, интеграл 11 □

Следствие 2.37.16.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- f — непрерывна в точке x_0
- $\exists$ конечный односторонние производные в точке x_0 (либо f дифференцируема в x_0)

Тогда $S_n(f, x_0) \to f(x_0)$

Доказательство. Следует из 2.37.15 □

2.49 Корректность определения свертки

Свойство 4. *Корректность определения*

$$g(x, t) = f(x - t) \cdot k(t)$$

1. *Проверим, что $\varphi(x, y) \coloneqq f(x - t)$ — измерима как функция $\mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, тогда и $g : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима. Обозначим $a \in \mathbb{R}$ $E_a \coloneqq \mathbb{R}(f(x) < a)$*

$$V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$$

— измеримо в $\mathbb{R}^2$ $\implies$ $\mathbb{R}^2(\varphi < a)$ — тоже измеримо в $\mathbb{R}^2$

2. *$g \in L^1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$?*

$$\iint_{[-\pi,\pi]^2} |g(x, t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt |k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t)|\, dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1$$

Тогда по теореме Фубини для интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)k(t)\, dt$$

— при почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ этот интеграл существует(и конечен?) и задает по x функцию из $L^1(-\pi, \pi]$, т.е. $f * k$ определен при почти всех x, $\in L^1[-\pi, \pi]$

2.50 Свойства свертки

Свойство 1. $f * k = k * f$

Доказательство. $t \coloneqq -t$ □

Свойство 2. $c_n(f * k) = 2\pi \cdot c_n(f) \cdot c_n(k)$

Доказательство.

$$2\pi c_n(f*k) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\cdot e^{-inx}\,dt\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} k(t)e^{-int}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}\,dx\,dt = 2\pi c_n(f)\cdot 2\pi c_n(k)$$

□

Свойство 3.

- $f \in L^p[-\pi,\pi]$
- $k \in L^q[-\pi,\pi]$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \le p \le +\infty$

Тогда $f * k$ — непрерывная функция и $\|f*k\|_\infty \le \|k\|_q \cdot \|f\|_p$

Доказательство. Неравенство очевидно — это неравенство Гельдера

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\,dt\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\cdot|k(t)|\,dt \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |k(t)|^1\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|k\|_q$$

Непрерывность:

$$|f*k(x+h) - f*k(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+h-t) - f(x-t)\right)k(t)\,dt\right| \le \|k\|_q \cdot \|f_h(x) - f(x)\|_p$$

□

Свойство 4.

- $f \in L^p[-\pi,\pi] \quad 1 \le p \le +\infty$
- $k \in L^1[-\pi,\pi]$

Тогда $f * k \in L^p[-\pi,\pi]$

$$\|f*k\|_p \le \|k\|_1 \cdot \|f\|_p$$

2.51 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

Теорема 2.38. K_h — а.е.

1. $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi] \implies f * K_h \xrightarrow[h\to h_0]{[-\pi,\pi]} f$
2. $f \in L^1[-\pi,\pi] \implies \|f*K_h - f\|_1 \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$
3. K_h — усиленная а.е. $f \in L^1[-\pi,\pi]$, f — непрерывная в x
   Тогда
   - $f * K_h$ — непрерывна в x
   - $f * K_h(x) \xrightarrow[h\to h_0]{} f(x)$

Доказательство.

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h \, dt$$

M — из AE2

1. $\varepsilon > 0$, f — равномерно непрерывна

$$\exists \delta > 0 \ \forall t, |t| < \delta \ \forall x |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$|f * K_h(x) - f(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)||K_h(t)| \, dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon$$

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \le \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \le 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[h \to h_0]{} 0 \underset{\text{AE3}}{\Longrightarrow} \exists V(h_0) \ \forall h \in V(h_0) \ I_2 \le \frac{\varepsilon}{2}$$

3. $f \in L^1$, $K_h \in L^\infty \implies f * K_h$ — непрерывна
Для данного x проверим утверждение $\varepsilon > 0$; $I_1 + I_2 < \varepsilon$; $\exists V(h_0) \ \forall h \in V(h_0)$
f — непрерывна в x

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t, \ |t| < \delta \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \le \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)| \, dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)| \, dt$$
$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi |f(x)|) \xrightarrow[h \to h_0]{} 0$$

, т.е. $\exists V(h_0) \ \forall h \in V(h_0) \ I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$

2.

$$\|f * K_h - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h \, dt \right| dx \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)| \, dx \, dt =$$

$$= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} \, dt$$

, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|$ — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$= \|K_h\|_1 \left(g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|} \right)(0)$$

— по п.1 $g(0) = 0$

□

2.52 Теорема о перманентности метода средних арифметических

Теорема 2.39.

$$\sum a_n = S \implies \sum a_n \underset{\text{с.а.}}{=\!=} S$$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N, \ \forall n > N, \ |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S_k - S) \right| \le \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |S_k - S|}{n+1}$$

$\exists N \ \forall n > N$ эта дробь $< \frac{\varepsilon}{2}$

□

2.53 Теорема Фейера

Примечание.

$$S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\,dt$$

$$\sigma_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t)\,dt$$

, где $\Phi_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + \dots + D_n) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2\frac{t}{2}}$ — **ядро Фейера**

Теорема 2.40 (Фейера)**.**

1. $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$
   Тогда $\sigma_n(f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f$
2. $f \in L^p[-\pi,\pi] \implies \|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$
3. $f \in L^1$, f — непрерывна в $x \implies \sigma_n(f,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

Доказательство. Проверим: Φ_n — усиленная а.е. и тогда 1-3 следуют из свойства а.е.

AE1 $\Phi_n \in L^1$, т.к. Φ_n — непрерывная (и даже $\Phi_n \in L^\infty$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$$

AE2 следует из AE1, поскольку $\Phi_n \geq 0$

AE3 $t \in E_\delta$

$$0 \leq \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□

2.54 Следствия из теоремы Фейера

Следствие 2.40.17. $f \in L^1[-\pi,\pi]$ — непрерывна в x. Если ряд Фурье f сходится в точке x

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n(f,x) \text{ — конечный}$$

, то $S_n(f,x) \to f(x)$

Доказательство.

$$\sigma_n(f,x) \to f(x)$$

и по теореме Коши □

Следствие 2.40.18.

1. Тригонометрическая система полна в $L^2[-\pi,\pi]$
2. $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $\forall k\ a_k(f) = 0,\ b_k(f) = 0$ либо $\forall k \in \mathbb{Z}\ \mathrm{C_k(f)} = 0$
   Тогда $f = 0$ почти везде

Доказательство.

1. Следствие из 2.: $\forall k\ f \perp \cos kx$ и $f \perp \sin kx$

   $$0 = \langle f, \cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx = \pi a_k(f)$$

   , т.е. $a_k = 0$
2. $S_n(f) = 0$ почти везде, $\sigma_n(f) = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде

□

Следствие 2.40.19. $f \in L^2[-\pi, \pi]$
Тогда ряд Фурье f сходится к f в L^2:

$$S_n(f) \to f \text{ в } L^2 \quad \|S_n(f) - f\|_2 \to 0$$

— общее свойство базиса

Следствие 2.40.20. $f \in L^1[0, \pi]$. Коэффициенты f по системе $\{\cos kx\}$ равно 0
Тогда $f = 0$ почти везде
Аналогично для $\{\sin kx\}$

Следствие 2.40.21 (теорема Вейерштрасса). Тригонометрический полином плотный в $L^p[-\pi, \pi]$ и $\tilde{C}[-\pi, \pi]$, $1 \leq p < +\infty$

Следствие 2.40.22. $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ Тогда выполняются равенства Парсеваля:

1. $$\int\limits_{[pi,\pi]} f\overline{g} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(h)}$$

2. $$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi \sum |c_k(f)|^2$$

3. $$\int_{-\pi}^{\pi} fg = \pi \left(\frac{a_0(f)a_0(h)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g) \right)$$

4. $$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi \left(\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right)$$

2.55 Теорема об интегрировании ряда Фурье

Лемма 9. $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$ *— ядро Дирихле*
Тогда $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$\left| \int_0^x D_n(t) \right| < 2$$

Теорема 2.41. $f \in L^1[-\pi, \pi]$
Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}\,dx$$

Доказательство. Достаточно доказать: $-\pi \leq a < b \leq \pi$, $\chi = \chi_{[a,b]}$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}\,dx = \sum \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \cdot 2\pi c_{-k}(\chi) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot S_n(\chi, t)\,dt \to \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \chi = \int_a^b f$$

$$S_n(\chi, t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \chi(t)$$

при $t \in [-\pi, \pi],\ t \neq a, b$ по признаку Дини

$$S_n(\chi, t) = \int \chi \cdot D_n = \int_a^b D_n(x-t) = \int_0^{b-t} D_n(x)\,dx - \int_0^{a-t} D_n(x)$$

по лемме $|S_n(x,t)| \leq 4$. Таким образом

$$f \cdot S_n \to f \cdot \chi \text{ — почти везде}$$

$$|f \cdot S_n| \leq \underbrace{4 \cdot |f|}_{\text{сумм.}}$$

Работает условие теоремы Лебега. □

2.56 Лемма о слабой сходимости сумм Фурье

Теорема 2.42 (о ‘слабой‘ сходимости рядов Фурье)**.** $f \in L^1[-\pi, \pi]$ $\forall u \in \tilde{C}^1[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x) \cdot u(x)\, dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x) u(x)\, dx$$

Доказательство.

1. $f \in L^1$ u — непрерывна $\implies$ $u \in L^\infty$ $\implies$ $f * u$ — непрерывная и даже гладкая

$$\frac{d}{dx}(f * u)(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) u(x - t)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) u'_x(x - t)\, dt$$

— обобщенный предел Лейбница

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x) u(x)\, dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} u(x)\, dx \xlongequal[\underline{u}(x) := u(-x)]{}$$

$$= \sum c_k(f) c_k(\underline{u}) \cdot 2\pi = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f * \underline{u}) =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f * \underline{u}) e^{ikx}\big|_{x=0} \to f * \underline{u}\big|_{x=0} =$$

— по признаку Дини

$$= f * \underline{u}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) u(-t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) u(t)\, dt$$

□