

Вопросы к экзамену

Цуя Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1	Определения и формулировки	3
1.1	Ступенчатая функция	3
1.2	Разбиение, допустимое для ступенчатой функции	3
1.3	#A Измеримая функция	3
1.4	Свойство, выполняющееся почти везде	4
1.5	#A Сходимость почти везде	4
1.6	Сходимость по мере	4
1.7	Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости	4
1.8	Интеграл ступенчатой функции	4
1.9	#A Интеграл неотрицательной измеримой функции	5
1.10	#A Суммируемая функция	5
1.11	Интеграл суммируемой функции	5
1.12	Образ меры при отображении	5
1.13	Взвешенный образ меры	5
1.14	Плотность одной меры по отношению к другой	6
1.15	Измеримое множество на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3	6
1.16	Мера Лебега на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3	6
1.17	#A Поверхностный интеграл первого рода	6
1.18	Произведение мер	6
1.19	#A Теорема Фубини	7
1.20	Сторона поверхности	7
1.21	Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов	7
1.22	#A Интеграл II рода	7
1.23	Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности	7
1.24	Интегральные неравенства Гельдера и Минковского	8
1.25	Интеграл комплекснозначной функции	8
1.26	#A Пространство $L^p(E, \mu)$	8
1.27	#A Пространство $L^\infty(E, \mu)$	8
1.28	#A Существенный супремум	9
1.29	#A Ротор, дивергенция векторного поля	9
1.30	Соленоидальное векторное поле	9
1.31	Бескоординатное определение ротора и дивергенции	9
1.32	#A Гильбертово пространство	9
1.33	Ортогональный ряд	9
1.34	Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве	9
1.35	Ортогональная система (семейство) векторов	10
1.36	#A Ортонормированная система	10
1.37	Коэффициенты Фурье	10
1.38	Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве	10
1.39	Базис, полная, замкнутая ОС	10
1.40	Тригонометрический ряд	10
1.41	Коэффициенты Фурье функции	11
1.42	Класс Липшица с константой M и показателем альфа	11

1.43	Ядро Дирихле, ядро Фейера	11
1.44	#A Свертка	11
1.45	#A Аппроксимативная единица	12
1.46	Усиленная аппроксимативная единица	12
1.47	Метод суммирования средними арифметическими	12
1.48	Суммы Фейера	12
2	Теоремы	13
2.1	Лемма “о структуре компактного оператора“	13
2.2	#A Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении	13
2.3	Теорема об измеримости пределов и супремумов	14
2.4	#A Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия	14
2.5	Измеримость функции, непрерывной на множестве полной меры	15
2.6	Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере	15
2.7	Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде	16
2.8	Простейшие свойства интеграла Лебега	16
2.9	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	18
2.10	#A Теорема Леви	19
2.11	Линейность интеграла Лебега	20
2.12	Теорема об интегрировании положительных рядов. Следствие о рядах, сходящихся почти везде	20
2.13	Абсолютная непрерывность интеграла	21
2.14	#A Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере	21
2.15	#A Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде	22
2.16	Теорема Фату. Следствия	22
2.17	Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры	23
2.18	Критерий плотности	24
2.19	Лемма о единственности плотности	25
2.20	Лемма об оценке мер образов малых кубов	25
2.21	Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме	26
2.22	Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега	27
2.23	Теорема о произведении мер	28
2.24	Принцип Кавальери	28
2.25	Теорема Тонелли	30
2.26	Формула для Бета-функции	31
2.27	Объем шара в \mathbb{R}^m	32
2.28	Формула Грина	32
2.29	#A Формула Стокса	33
2.30	#A Формула Гаусса–Остроградского	34
2.31	Соленоидальность бездивергентного векторного поля	35
2.32	Теорема о вложении пространств L^p	35
2.33	Теорема о сходимости в L^p и по мере	36
2.34	Полнота L^p	36
2.35	Плотность в L^p множества ступенчатых функций	37
2.36	Лемма Урысона	37
2.37	Плотность в L^p непрерывных финитных функций	38
2.38	#A Теорема о непрерывности сдвига	39
2.39	Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве	40
2.40	Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе	40
2.41	Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	41
2.42	Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля	41
2.43	Теорема о характеристике базиса	42
2.44	Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	43
2.45	Теорема Римана–Лебега	43
2.46	Три следствия об оценке коэффициентов Фурье	44
2.47	Принцип локализации Римана	45
2.48	#A Признак Дини. Следствия	45
2.49	Корректность определения свертки	46

2.50	Свойства свертки	47
2.51	Теорема о свойствах аппроксимативной единицы	47
2.52	Теорема о перманентности метода средних арифметических	48
2.53	Теорема Фейера	49
2.54	Следствия из теоремы Фейера	49
2.55	Теорема об интегрировании ряда Фурье	50
2.56	Лемма о слабой сходимости сумм Фурье	51

1 Определения и формулировки

1.1 Ступенчатая функция

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i$ — **разбиение множества**

2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если
 \exists разбиение:

$$X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ f|_{e_i} = \text{const} = c_i$$

При этом такое разбиение — **допустимое разбиение**

1.2 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

см. 1.1

1.3 #A Измеримая функция

Определение.

- $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество функции f**

$E(f \leq a)$, $E(f > a)$, $E(f \geq a)$ — также лебеговы множества

Если f задана на X : $X(f < a)$, $X(f \leq a)$, ... — лебеговы множества

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f — **измерима на множестве E** :

$\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ — измеримо(т.е. $\in \mathfrak{A}$)

Обозначение.

- f — измерима на X — говорят просто "измерима"
- $X = \mathbb{R}^m$, мера Лебега — измеримо по Лебегу

Замечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \geq a)$ — измеримо

1.4 Свойство, выполняющееся почти везде

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верное **при почти всех** $x \in E$

= **почти всюду** на E

= **почти везде** на E

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

1.5 #A Сходимость почти везде

Пример. $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ при почти всех $x \in E$

$\exists e, \mu e = 0$, при $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$

1.6 Сходимость по мере

Определение.

- $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечные
- f_n сходится к f по мере
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

1.7 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

Теорема 1.1 (Егорова).

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \rightarrow f$ почти везде

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \subset X, \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$

1.8 Интеграл ступенчатой функции

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X \quad \mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{cases}$
2. $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

Определение.

1.
 - $f \geq 0$, ступенчатые
 - $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$, E_k — измеримое

$$\int_X f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. • $f \geq 0$, измеримая

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ — ступ.}}} \int_X g d\mu$$

3. • f — измерима
• $f^+, f^- \geq 0$ — измеримые

Пусть $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечные

Тогда $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$

Если $\int_X f^+, \int_X f^-$ — оба конечные, то f называется **суммируемой**

Замечание. f — измеримая, ≥ 0 , интеграл **3** = интеграл **2**

4.

- $E \subset X$ — измеримое
- f — измерима на X

$$\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E$$

1.9 #A Интеграл неотрицательной измеримой функции

см. 1.8

1.10 #A Суммируемая функция

см. 1.8

1.11 Интеграл суммируемой функции

см. 1.8

1.12 Образ меры при отображении

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, \cdot)
- $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле: $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$. Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$
Тогда ν — мера:

$$\nu(\bigsqcup E_n) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_n)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом μ при отображении Φ** и

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$$

1.13 Взвешенный образ меры

Определение.

- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измерима (на X относительно \mathfrak{A})
- $\omega \geq 0$

$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

— **взвешенный образ меры μ при отображении Φ , ω — вес**

1.14 Плотность одной меры по отношению к другой

Определение. (X, \mathfrak{A}, μ) и $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — меры

Плотность меры ν относительно μ — это функция $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$ — измеримая
 $\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$

1.15 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие. $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — параметризация. $E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в \mathbb{R}^2 по Лебегу

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M | E \text{ — измеримо}\} = \{\varphi(A) | A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

1.16 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3

Определение. Мера на \mathfrak{A}_M

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| dudv$$

Т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ

Замечание. \mathfrak{A}_M — σ -алгебра, S — мера

1.17 #A Поверхностный интеграл первого рода

Определение (поверхностный интеграл I рода).

- M — простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3
- φ — параметризация
- $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема по мере s

Тогда

$$\iint_M f ds = \iint_M f(x, y, z) ds$$

называется **интегралом I рода от f по многообразию M**

Замечание. По теореме об интегрировании по взвешенному образу меры

$$\iint_M f ds = \iint_G f(\varphi(u, v)) |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{pmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \sin \alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 \cdot |\varphi'_v|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$E = |\varphi'_u|^2 = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$$

$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \quad F = |\varphi'_v|^2$$

1.18 Произведение мер

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ -конечные

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 с п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на σ -алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

Определение. $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \nu \times \mu)$ — **произведение пространств с мерой** (X, \mathfrak{A}, μ) и (Y, \mathfrak{B}, ν)

1.19 #A Теорема Фубини

Теорема 1.2 (Фубини).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- ν, μ — σ -конечные
- $m = \nu \times \mu$
- f — суммируема на $X \times Y$ относительно m

Тогда

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — суммируема на X
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

1.20 Сторона поверхности

Определение. Сторона поверхности — непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности

- $M \subset \mathbb{R}^3$
- $W : M \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\forall x W(x)$ — нормаль к M , $|W(x)| = 1$, $W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$

1.21 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

Замечание. Другой способ задания стороны поверхности

1. u, v — касательные векторы
 $u \parallel v$, (u, v) — касательный репер
 Если задано непрерывное поле реперов, то они задают сторону $n = u \times v$ (отнормировать)
2. Задана петля + указано непрерывное движение

1.22 #A Интеграл II рода

Определение.

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M
- $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное поле (непрерывное)

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle ds$$

— интеграл II рода векторного поля F по поверхности M

1.23 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Определение. M — поверхность в \mathbb{R}^3 , n_0 — сторона, γ — контур (петля) в M — ориентированный. Говорят, что сторона поверхности n_0 согласована с ориентацией γ : $(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$, $N_{\text{внутр.}}$ — вектор внутренней нормали к области, ограниченной петлей. Т.е. если ориентация γ задает сторону n_0

1.24 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

Свойство 1 (Неравенство Гельдера).

- $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- (X, \mathfrak{A}, μ)
- E — измеримое
- $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримые

Тогда

$$\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Свойство 2 (Неравенство Минковского). Те-же условия что и в [Неравенстве Гельдера](#)

$$\left(\int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.25 Интеграл комплекснозначной функции

Свойство 3.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$
 $f(x) = u(x) + iv(x)$
 $u = \Re f, v = \Im f$
- f — измеримая, если u и v — измеримые
- f — суммируемая, и u и v — суммируемые
- f — суммируемая: $\int_E f = \int_E u + i \int_E v$

1.26 #A Пространство $L^p(E, \mu)$

Свойство 4.

Определение. $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \subset X$ — измеримое

$$\mathcal{L}^p(E, \mu) := \left\{ f : \text{почти везде } E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \mid f \text{ — измеримая, } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

— это линейное пространство (по неравенству Минковского)

$f, g \in \mathcal{L}^p(E, \mu) : f \sim g$ $f = g$ почти везде ($f - g = 0$ почти везде). $\mathcal{L}^p / \sim = L^p(E, \mu)$ — линейной пространство. Задаем норму $\|f\|_{L^p(E, \mu)} = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

1.27 #A Пространство $L^\infty(E, \mu)$

Замечание. $L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}(\mathbb{C})}, \text{ изм., } \text{ess sup } |f| < +\infty\} / \sim$. Эквивалентные функции отождествлены — это нормированное пространство

$$\|f\|_{L^\infty(E, \mu)} := \text{ess sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

1.28 #A Существенный супремум

Свойство 5.

- $L^\infty(E, \mu)$
- (X, \mathfrak{A}, μ)
- E — измеримое
- f — почти везде $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf \{A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f \leq A \text{ почти везде}\}$$

1.29 #A Ротор, дивергенция векторного поля

Определение. V — гладкое векторное поле. **Дивергенция:**

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Определение.

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Omega} \langle \operatorname{rot}(V), n_0 \rangle ds$$

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

— ротор векторного поля (вихрь векторного поля)

1.30 Соленоидальное векторное поле

Определение. Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ — **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если \exists гладкое векторное поле B в Ω :

$$A = \operatorname{rot} B$$

B — называется **векторным потенциалом** A

1.31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

Замечание.

$$\operatorname{div} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V dx dy dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, \bar{n}_0 \rangle ds$$

— не зависит от координат

см. 1.29

1.32 #A Гильбертово пространство

Определение. \mathcal{H} — линейное пространство в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при это \mathcal{H} — полное (как метрическое пространство), то оно называется **Гильбертовым пространством**

1.33 Ортогональный ряд

Определение. $x, y \in \mathcal{H}$ x ортогонально y ($x \perp y$) если $\langle x, y \rangle = 0$

Определение. Ряд $\sum a_k$ — **ортогональный**, если $\forall k, l \ a_k \perp a_l$

1.34 Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве

Определение. Сходящийся ряд: $\sum a_n, a_n \in \mathcal{H}$

$$S_N = \sum_{1 \leq n \leq N} a_n$$

Если $\exists S \in \mathcal{H} \ S_N \rightarrow S$ в \mathcal{H}

1.35 Ортогональная система (семейство) векторов

Определение. $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ — ортогональное семейство. Если:

1. $\forall k, l \ e_k \perp e_l$
2. $\forall k \ e_k \neq 0$

Если потребовать

3. $\|e_k\| = 1$

, то будет ортонормированное семейство

1.36 #A Ортонормированная система

см. 1.35

1.37 Коэффициенты Фурье

Определение. $\{e_k\}$ — О.С. $x \in \mathcal{H}$

$$c_k(x) := \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

— называются коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_k\}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \cdot e_k$$

— ряд Фурье вектора x по системе e_k

1.38 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

см. 1.37

1.39 Базис, полная, замкнутая ОС

Определение. $\{e_k\}$ — ОС — базис \mathcal{H} , если $\forall x \in \mathcal{H} \ x = \sum c_k(x) e_k$

Определение. ОС — полная, если $\nexists z \neq 0 : z \perp$ всем e_k

Определение. ОС — замкнутая, если $\forall x \ \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

1.40 Тригонометрический ряд

Определение. $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — тригонометрический полином степени не выше n

Определение.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— тригонометрический ряд, a_k, b_k — коэффициенты тригонометрического ряда

Определение.

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

— комплексный тригонометрический полином или тригонометрический полином в комплексной записи

Определение.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

— тригонометрический ряд в комплексной записи

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \lim \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

1.41 Коэффициенты Фурье функции

Определение. $f \in L^1[-\pi, \pi]$. $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$ — заданные в лемме называются **коэффициентами Фурье функции f** а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$$

или

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

называются **рядом Фурье функции f**

1.42 Класс Липшица с константой M и показателем альфа

см. 2.46

1.43 Ядро Дирихле, ядро Фейера

Определение.

1.

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)$$

— **ядро Дирихле** (ядро в смысле kernel)

Ядро $K(x, y)$

$$f \mapsto \int_E f(t) K(x, y) dt$$

— **линейный оператор**

2.

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

— **ядро Фейера**

1.44 $\#A$ Свертка

Определение. $f, k \in L^1[-\pi, \pi]$

$$(f * k)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) k(t) dt$$

— **свертка функций f и k**

1.45 #А Аппроксимативная единица

Обозначение. $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta] = E_\delta$

Определение. Аппроксимативная единица

- $D \subset \mathbb{R}$
- h_0 — предельная точка в $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$ — называется аппроксимативной единицей

АЕ1 $\forall h \in D, K_h \in L^1[-\pi, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

АЕ2 L_1 — нормы функций K_h ограничены в совокупности

$$\exists M \forall h \int_{[-\pi, \pi]} |K_h| \leq M$$

АЕ3 $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h| dx \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

1.46 Усиленная аппроксимативная единица

Замечание.

АЕ3' $K_h \in L^\infty[-\pi, \pi]$ и $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

Определение. АЕ1 + АЕ2 + АЕ3' = усиленная аппроксимативная единица

1.47 Метод суммирования средними арифметическими

Определение.

$$\sum a_n \quad S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

$$\sum a_n \underset{\text{сред. арифм.}}{=} S$$

, если $\sigma_n \rightarrow S$

1.48 Суммы Фейера

Определение. $f \in L^1[-\pi, \pi], S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k(f)$$

— суммы Фейера

2 Теоремы

2.1 Лемма “о структуре компактного оператора”

Лемма 1 (о структуре компактного оператора). $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор, т.е. $\det V \neq 0$

Тогда:

- \exists ортонормированные базисы $g_1, \dots, g_m; h_1, \dots, h_m$
- $\exists S_1, \dots, S_m > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$ — разложение по базису

При этом $|\det V| = S_1 S_2 \dots S_m$

Доказательство. $W := V^* V$ — транспонирование в \mathbb{R}^m

W — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали)

Собственные числа c_1, \dots, c_m — вещественные

Собственные векторы g_1, \dots, g_m

Заметим что:

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0 \Rightarrow c_i > 0$$

- $S_i := \sqrt{c_i}$
- $h_i := \frac{1}{S_i} V g_i$

$$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{S_i S_j} \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i$$

, где δ_i — символ Кронекера (0 если $i \neq j$, 1 иначе)

$$V(x) = V \left(\sum_{i=1}^n \langle x, g_i \rangle g_i \right) = \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) = \sum S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 = \det(V^* V) = \det W = c_1 \dots c_m \tag{1}$$

1 — т.к. диагональная матрица □

2.2 #A Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

Теорема 2.1 (преобразование меры Лебега при линейном отображении).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда:

- $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$
- $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

$(\det V = 0)$ $\text{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ мера = 0

$(\det V \neq 0)$ $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера

μ — инвариантна относительно сдвигов

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + Va) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k \cdot \lambda$ (Лемма из предыдущего семестра)

Q — единичный куб на векторах g_i и $V(g_i) = S_i h_i$, $V(Q) = \{ \sum \alpha_i S_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1] \}$ — параллелепипед со сторонами S_i, \dots, S_m

□

2.3 Теорема об измеримости пределов и супремумов

Теорема 2.2. f_n — измерима на X .

Тогда:

1. $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$; $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ — измеримы
2. $\overline{\lim} f_n$; $\underline{\lim} f_n$ — измеримы
3. Если

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$$

, то $h(x)$ — измеримо

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$

- 2.

$$(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf \{s_n : s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)\}$$

3. очев.

□

2.4 #A Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия

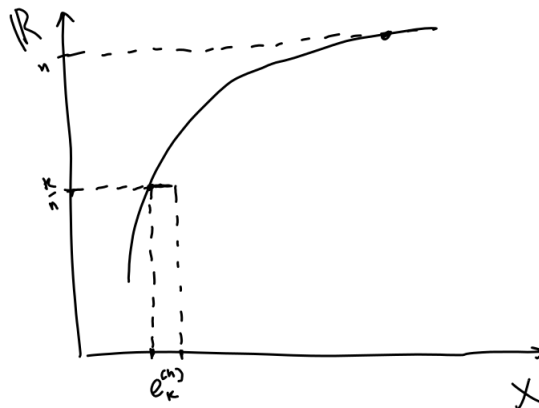
Теорема 2.3 (характеризация измеримых функции с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2. $\forall x f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Доказательство.



$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f \leq \frac{k}{n}\right) \quad k = 1, \dots, n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

Следствие 2.3.1. f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Следствие 2.3.2. f, g — измеримы

Тогда fg — измерима ($0 \cdot \infty = 0$)

Доказательство.

- $f_n \rightarrow f$
- $g_n \rightarrow g$
- f_n, g_n — ступенчатые

$f_n g_n$ — ступенчатая $f_n g_n \rightarrow fg$ □

Следствие 2.3.3. f, g — измеримы

Тогда $f + g$ — измерима

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ $g_n \rightarrow g$, (f_n, g_n) — ступенчатые

$f_n + g_n$ — ступенчатая $f_n + g_n \rightarrow f + g$

Считаем что $\forall x$, не может быть $f(x) = \pm\infty$, $g(x) = \mp\infty$ □

2.5 Измеримость функции, непрерывной на множестве полной меры

Теорема 2.4 (об измеримости непрерывной на множестве полной меры).

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима

Доказательство. f — измерима на E'

$E'(f < a)$ — открыто в E'

$$\left. \begin{array}{l} e(f < a) \subset e \\ \lambda_m - \text{полная} \end{array} \right\} \Rightarrow e(f < a) - \text{измерима в } E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

2.6 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

Теорема 2.5 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- μX — конечна

Тогда $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду Частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0 (т.е. $f \equiv 0$)

$$\left. \begin{aligned} X(|f_n| \geq \varepsilon) &= X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) &= \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывность меры сверху}$$

Общий случай: $f_n \rightarrow f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда $\varphi_n \rightarrow 0$, монотонна

$$\begin{aligned} X(|f_n - f| \geq \varepsilon) &\subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) &\leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

2.7 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

Теорема 2.6 (Рисс).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

Тогда $\exists n_k f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде

Доказательство. $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \rightarrow 0$
 $\exists n_k$: при $n > n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$
 можно считать: $n_1 < n_2 < n_3$
 Проверим $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$\begin{aligned} E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k &\leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0 \\ \mu E_k &\rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0 \end{aligned}$$

При $x \notin E f_{n_k} \rightarrow f$

$$x \notin E \exists N x \notin E_k$$

при $k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, т.е. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$

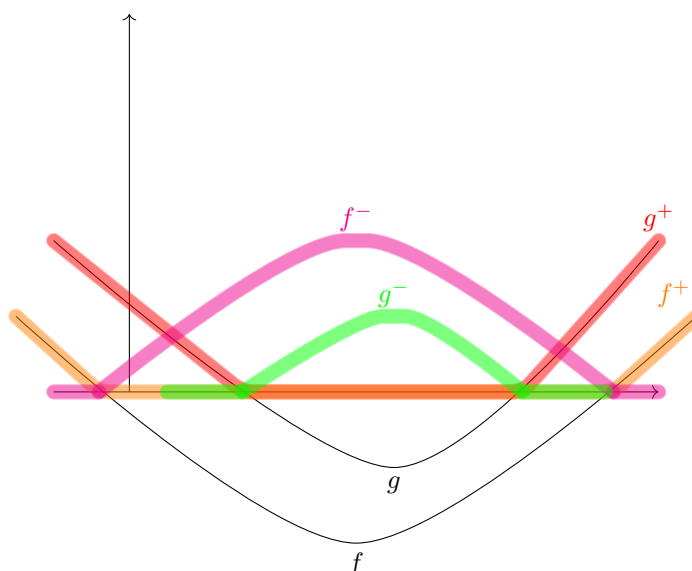
□

2.8 Простейшие свойства интеграла Лебега

Замечание. (X, \mathfrak{A}, μ) $E \subset X$ — измеримое, g, f — измеримые. Свойства:

1. Монотонность $f \leq g \int_E f \leq \int_E g$

Доказательство.



- (a) $f, g \geq 0$ — очевидно
 (b) f, g — произвольные
 $f^+ \leq g^+ \implies f^- \geq g^-$
 $\int_E f^+ \leq \int_E g^+ \implies \int_E f^- \geq \int_E g^- \implies \text{OK}$

□

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E; \int_E 0 d\mu = 0$
 3. $\mu E = 0 \implies \int_E f = 0$

Доказательство.

- (a) f — ступенчатая
 (b) $f \geq 0$ — измеримая

□

Замечание:

f — измеримая. Тогда f — суммируемая $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

- (\Leftarrow) следует из свойства 1. $f^+, f^- \leq |f|$
 (\Rightarrow) позже

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \int_E cf = c \int_E f$

Доказательство.

- (a) $(-f)^+ = f^- \quad (-f)^- = f^+$
 (b) можно считать $c > 0$ для $f \geq 0$ — тривиально

□

5. $\exists \int_E f d\mu$
 Тогда $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $-|f| \leq f \leq |f|$. По свойствам 1 и 4

□

6. $\mu E \leq +\infty, a \leq f \leq b$
 Тогда $a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$

Доказательство. $a\chi_E \leq f \leq b\chi_E$, тривиально □

Следствие 2.6.4. f — измерима на E , f — ограничена на E , $\mu E < +\infty$
Тогда f — суммируемая на E

7. f — суммируемая на E . Тогда f — почти везде конечная

Доказательство.

- (a) $f \geq 0$ $f = +\infty$ на $A \subset E \forall n \in \mathbb{N} \int_E f \geq n\mu A$
- (b) $f = f^+ - f^-$

□

2.9 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

Лемма 2.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

— измеримые, g — ступенчатая, $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\int_A g d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} = \sum_i \sum_k \dots = \sum_i \int_{A_i} g d\mu$$

□

Теорема 2.7.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая на A
- $f \geq 0$

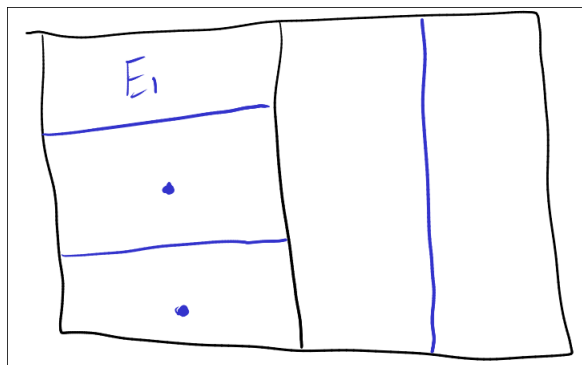
Тогда $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$

Доказательство.

(\leq) ступенчатая $g : 0 \leq g \leq f \int_A g = \sum \int_{A_i} g d\mu \leq \sum \int_{A_i} f$ — по [Лемме](#)

(\geq) 1. $A = A_1 \cup A_2$
 $0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1} \ 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A_2}, g_1, g_2$ — ступенчатые

$$g_1 = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \quad g_2 = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$



Считаем что E_k – совместное разбиение

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2 \leq \int_A f$$

Перейдем к супремуму интегралов g_1, g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ – индукция по n

3.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \sqcup B_n$$

, где

$$B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

□

2.10 #A Теорема Леви

Теорема 2.8 (Леви).

- (X, \mathfrak{A}, μ) , f_n – измеримая
- $\forall n$ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде
- $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ почти везде

Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Доказательство.

(\leq) очевидно. $f_n \leq f$ почти везде $\int f_n \leq \int f$

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \int_e f_n = \int_{X \setminus e} f_n \leq \int_{X \setminus e} f \leq \int_X f$$

(\geq) Достаточно $\forall g$ – ступенчатая $0 \leq g \leq f$

$$\lim \int_X f_n \geq \int_X g$$

Достаточно $\forall c \in (0, 1)$

$$\lim \int_X f_n \geq c \int_X g$$

$$E_n := X(f_n \leq cg) \quad \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$ т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \int_X g$

Последнее равенство справедливо в силу непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

□

2.11 Линейность интеграла Лебега

Теорема 2.9. $f, g \geq 0$ измеримы на E

Тогда

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, \quad g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \lim f_n = f$
 $g \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \lim g_n = g$

$$f_n + g_n \rightarrow f + g \quad \int_E f_n + g_n \rightarrow \int_E f + g$$

$$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n \rightarrow \int_E f + \int_E g = \int_E f + g$$

□

Следствие 2.9.5. f, g — суммируемы на E

Тогда $f + g$ — суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

2.12 Теорема об интегрировании положительных рядов. Следствие о рядах, сходящихся почти везде

Теорема 2.10 (об интегрировании положительных рядов).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая
- $u_n \geq 0$ почти везде

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. по т. Леви: $S_n := \sum_{k=1}^n u_k$
 $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots S_n \rightarrow S$ — сумма ряда $\sum u_n$

Тогда $\int_E S_n \rightarrow \int_E S$

$$\int_E S_n = \sum_{k=1}^n \int_E u_k \rightarrow \int_E S$$

□

Следствие 2.10.6. u_n — измеримые $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$

Тогда ряд $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. $S(x) := \sum |u_n(x)| \geq 0$ — измеримая

$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow S$ — суммируема $\Rightarrow S$ почти везде конечна

□

2.13 Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 2.11 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E$ — измеримое, $\mu E < \delta \implies \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

Следствие 2.11.7.

- f — суммируемая
- $\mu E_n \rightarrow 0$

Тогда $\int_{E_n} f \rightarrow 0$

Доказательство. Возьмем множества $X_n := X(|f| \geq n)$, очевидно что $X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$, а также $\mu(\bigcap X_n) = 0$

Утверждение: $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ — это свойство непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, тогда при $\mu E < \delta$

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| \leq \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

2.14 #A Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

Теорема 2.12 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$
- $\exists g$ — суммируемая мажоранта:
 1. $\forall n |f_n| \leq g$ почти везде
 2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируема в силу 1, f — суммируема по следствию т. Рисса: $|f| \leq g$ почти везде

'тем более' $= \left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1. $\mu X < +\infty$ фиксируем ε $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$
 $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \rightarrow 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} |f_n - f| + \int_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$

По следствию т. об абсолютной непрерывности: $\int_{X_n} 2g \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2. $\mu X = +\infty$

Проверим утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset X$ — измеримое, μA — конечная: $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$

$$\int_X g = \sup \left\{ \int g_n, 0 \leq g_n \leq g, g_n \text{ — ступенчатая} \right\}$$

$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$

— при достаточно больших n

$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} 2g$$

По 1 $\int_A |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ $\int_{X \setminus A} 2g < 2\varepsilon$

т.е. при больших n $\int_X |f_n - f| d\mu < 2\varepsilon$

□

2.15 #A Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

Теорема 2.13 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- $\exists g$ — суммируемая мажоранта:
 1. $\forall n |f_n| \leq g$ почти везде
 2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Доказательство.

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

- $0 \leq h_n \leq 2g$
- h_n — монотонно убывает
- $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде

$2g - h_n \geq 0$ — эта последовательность возрастает, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

□

2.16 Теорема Фату. Следствия

Теорема 2.14 (Фату).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f_n \geq 0$ — измеримая
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- $c > 0 \forall n \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Доказательство.

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots)$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1} \quad \lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ почти везде}$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq c$$

$$\int_X g_n \rightarrow \int_X f \Rightarrow \int_X f \leq c$$

□

Следствие 2.14.8.

- $f_n, f \geq 0$ — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \Rightarrow f$
- $\exists c > 0 \forall n \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Доказательство.

$$f_n \Rightarrow f \Rightarrow \exists n_k \quad f_{n_k} \rightarrow f \text{ почти везде}$$

□

Следствие 2.14.9.

- $f_n \geq 0$ — измеримые

Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство. Как в теореме:

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n$$

Выберем n_k :

$$\int_X f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Рассмотрим первое неравенство для n_k :

$$\int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k}$$

$$\int_X g_{n_k} \rightarrow \int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

□

2.17 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

Теорема 2.15.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- $\Phi : X \rightarrow Y$
- ν — взвешенный образ меры μ при отображении Φ с весом ω
- $\omega \geq 0$ — измерима на X

Тогда $\forall f$ — измеримые на Y относительно \mathfrak{B} , $f \geq 0$
 $f \circ \Phi$ — измеримая на X относительно \mathfrak{A} и

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \quad (2)$$

То же верно для суммируемых f

Доказательство. $f \circ \Phi$ — измеримая

1. Пусть $f = \chi_B, B \in \mathfrak{B}$

$$f \circ \Phi(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда 2:

$$\nu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

— это определение ν

2. f — ступенчатая. 2 следует из линейности интеграла

3. $f \geq 0$ — измеримая: теорема об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми + т. Леви

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots, h_i \text{ — ступенчатая } h_i \leq f, h_i \rightarrow f$$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 2 \text{ для } f$$

4. f — измеримая \Rightarrow для $|f|$ выполнено 2 $\Rightarrow |f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ — суммируемы одновременно
 Берем f_+, f_- , для них интегралы конечные.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega$$

□

2.18 Критерий плотности

Теорема 2.16 (критерий плотности).

- (X, \mathfrak{A}, μ) , ν — еще одна мера
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$ — измеримая

Тогда ω — плотность ν относительно $\mu \Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A \omega$$

Доказательство критерия плотности.

(\Rightarrow) очевидно

(\Leftarrow) Не умаляя общности $\omega > 0 : e = X(\omega = 0)$

$$\nu(e) = \int_e \omega d\mu = 0$$

Для случая когда $A \cap e = \emptyset$ все только лучше

Фиксируем $q \in (0, 1)$

$$A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{q^{-1} \quad q^{-2}} \\ 0 \quad q^2 \quad q \quad 1 = q^0 \end{array}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \nu A_j \leq \mu A_j \cdot q^{j-1} \quad (3)$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq \mu A_j \cdot q^{j-1} \quad (4)$$

Тогда

$$q \cdot \int_A \omega d\mu \leq q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \leq \sum q^j \mu A_j \leq \sum \nu A_j \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu = \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

то есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

и $q \rightarrow 1 - 0$

□

2.19 Лемма о единственности плотности

Лемма 3.

- f, g — суммируемые
- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $\forall A \in \mathfrak{A}: \int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство. $h := f - g$

Дано $\forall A \int_A h = 0$

Доказать $h = 0$ почти везде

- $A_+ := X(h \geq 0)$
- $A_- := X(h < 0)$

$$X = A_+ \sqcup A_-$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$$

$$\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0$$

тогда

$$\int_X |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ почти везде

□

2.20 Лемма об оценке мер образов малых кубов

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое
- $a \in O$
- $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$

Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \forall$ куба $Q \subset B(a, \delta), a \in Q$

выполняется неравенство $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(a) + L \cdot (x - a) + o(x - a) \quad x \rightarrow a \\ \underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} &= x + o(x - a)\end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар } B_\varepsilon(a) \forall x \in B_\varepsilon(a) |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a)$ $a \in Q$ — куб со стороной h . При $x \in Q$: $|x - a| \leq \sqrt{m}h$

$$|\Psi(x) - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$: при $x, y \in Q$

$$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \leq (1 + 2\varepsilon)h$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq \underbrace{|\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m}_{\text{выбираем } \varepsilon \text{ чтобы } \dots < c} \lambda Q$$

потом берем $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ □

2.21 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

Лемма 5.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое
- $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное
- $Q \subset \bar{Q} \subset O$ — кубическая ячейка
- $A \subset Q$

Тогда

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G - \text{открытое} \subset O}} \left(\lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Теорема 2.17.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \in O$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство. Обозначим якобиан $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$

$\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера. Т.е. надо доказать: J_Φ — плотность ν относительно λ . Тогда достаточно проверить условие критерия плотности

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5}$$

Достаточно проверить только правое неравенство. левое — это "правое для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1} "

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

1. Проверяем второе неравенство 5 для случая когда A — кубическая ячейка. $A \subset \bar{A} \subset O$. От противного:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$$

Возьмем $C > \sup_Q J_\Phi$: $C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$. Запускаем процесс половинного деления: Режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую" ячейку $Q_1 \subset Q$: $C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берем Q_2 : $C \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и так далее

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{6}$$

$$a \in \bigcap \bar{Q}_i \quad C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\bar{Q}} J_\Phi, \text{ в частности } C > |\det \Phi'(a)|$$

Получаем противоречие с леммой: в сколь угодно малой окрестности a имеются кубы \bar{Q}_n , где выполняется 6. **Противоречие**

2. Проверим второе неравенство 5 для открытых множеств $A \subset O$
 Это очевидно $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \bar{Q}_j \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \mu_{Q_j} \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \sum \mu_{Q_j} = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{7}$$

3. По лемме второе неравенство 5 выполнено для всех измеримых A

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \bar{Q}_j \subset O$$

$$A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j} \quad A_j \subset G \text{ — открытое}$$

$$\nu A_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \inf_{\substack{A_j \subset G \\ G \text{ — откр.}}} (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично 7 получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$ □

2.22 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

Теорема 2.18.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall f$ — измеримых, ≥ 0 , заданных на $O' = \Phi(O)$

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda$$

, где $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$. То же верно для суммируемых функций f

Доказательство. Применяем теорему о взвешенном образе меры.

Дано:

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (T, \mathfrak{B}, ν)
- $\Phi : X \rightarrow Y$ — с сохранением измеримости
- $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$
- $\omega : Y \rightarrow \mathbb{R}, \geq 0$, измеримый
- ν — взвешенный образ μ с весом ω :

$$\mu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega(x) d\mu$$

В нашем случае

- $X = Y = \mathbb{R}^m$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$
- Φ — диффеоморфизм
- $\mu = \lambda$
- $\nu(A) = \lambda\Phi(A)$

Под действием гладкого отображения Φ , σ -алгебра \mathfrak{M}^m сохраняется
По [теореме](#)

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} J_\Phi d\lambda$$

т.е. λ — взвешенный образ исходной меры Лебега по отношению к Φ □

2.23 Теорема о произведении мер

Теорема 2.19.

1. m_0 — мера на \mathcal{P}
2. ν, μ — σ -конечные $\Rightarrow m_0$ — тоже σ -конечная

Доказательство.

1. m_0 — счетно аддитивна $m_0 P = \sum m_0 P_k$, если

$$A \times B = P = \bigsqcup P_k, \text{ где } P_k = A_k \times B_k$$

Наблюдение: $\mathcal{X}_{A \times B}(x, y) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(y)$

Тогда $\mathcal{X}_P = \sum \mathcal{X}_{P_k}$, т.е.

$$\forall x \in X, y \in Y \quad \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y) = \sum \mathcal{X}_{A_k}(x)\mathcal{X}_{B_k}(y)$$

проинтегрируем по y по мере ν :

$$\mathcal{X}_A(x)\nu B = \sum \mathcal{X}_A(x) \cdot \nu B_k$$

Интегрируем по x :

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$$

2. Очев. μ — σ -конечная $\Rightarrow X = \bigcup X_k$, μX_k — конечная ν — σ -конечная $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n$, νY_k — конечная

$$X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n \quad m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n \text{ — конечная}$$

$\Rightarrow m_0$ — σ -конечная мера □

2.24 Принцип Кавальери

Определение.

- X, Y — множества
- $C \subset X \times Y$

$$C_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X \mid (x, y) \in C\}$$

Теорема 2.20 (Кавальери).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- ν, μ — σ -конечные, полные
- $m := \mu \times \nu$

Пусть $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая¹ функция на X
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y

Доказательство. \mathcal{D} — система множеств, для которых выполнено 1. - 3.

1. $C = A \times B \Rightarrow C \in \mathcal{D}$

$$(a) C_x = \begin{cases} \emptyset & x \notin A \\ B & x \in A \end{cases}$$

(b) $x \mapsto \nu(C_x)$ — это функция $\nu B \cdot \chi_A$

$$(c) \int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$$

2. $E_i \in \mathcal{D}$ — дизъюнкты $\Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathcal{D}$

$E_i \in \mathcal{D} \Rightarrow (E_i)_x$ — измеримое почти везде \Rightarrow при почти всех x все $(E_i)_x$ — измеримые

(a) Тогда при этих x $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$

(b) $\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\text{измеримая функция}} \Rightarrow$ функция $x \mapsto \nu E_x$ измеримая¹

(c)

$$\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE$$

3. $E_i \in \mathcal{D}$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $E = \bigcap_i E_i$, $\mu E_i < +\infty$ Тогда $E \in \mathcal{D}$

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — конечная при почти всех } x$$

(a) $\forall x$ верно $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots$, $E_x = \bigcap (E_i)_x$. Тогда E_x — измеримое при почти всех x и $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при почти всех x

(b) Таким образом $x \mapsto \nu E_x$ — измеримая¹

(c)

$$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$$

Первое равенство по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — из¹

Итог: $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathcal{D}$

¹функция задана при почти всех x . Она равна почти везде некоторой измеримой функции, которая задана на всем X . Это “не мешает” утверждению 3

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$

$$mE = \inf \left\{ \sum m_0 P_k \mid E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P} \right\}$$

— теорема о лебеговском продолжении.

\exists множества H вида $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$ (т.е. $H \in \mathcal{D}$)

$E \subset H, mH = mE = 0$

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x \sim 0 \quad (= 0 \text{ при почти всех } x)$$

$E_x \subset H_x, \nu$ — полная \Rightarrow

(a) E_x — измерима при почти всех x

(b) $\nu E_x = 0$ почти везде

(c) $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$

5. C — m -измеримо, $mC < +\infty$ тогда $C \in \mathcal{D}$

$C = H \setminus e$, где H — вида $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$, $me = 0$, $mC = mH$

(a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — измерима при почти всех x , т.к. ν — полная

(b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x \Rightarrow$ измерима

(c) $\int \nu C_x d\mu = \int \nu H_x d\mu = mH = mC$

6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathcal{D}$

$$X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$$

$$C = \bigsqcup (C \cap (X_k \times Y_j)) \text{ — используем 2.}$$

□

2.25 Теорема Тонелли

Теорема 2.21 (Тонелли).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- μ, ν — σ -конечные меры, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ — измерима относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда

1. при почти всех x f_x — измеримая на Y f^y — измерима на X почти везде

2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измеримая* на X

$y \mapsto \psi(y) = \int_X f^y d\mu$ — измеримая* на Y

$$\begin{aligned} 3. \int_{X \times Y} f dm &= \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \psi d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \end{aligned}$$

Доказательство.

1. Пусть $f = \mathcal{X}_C$, $C \subset X \times Y$ — измеримо относительно m . Тогда $f_x(y) = \mathcal{X}_{C_x}(y)$. C_x — измеримо при почти всех $x \implies f_x$ — измерима при почти всех x

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$$

$\varphi(x)$ — измерима (по принципу Кавальери)

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \stackrel{\text{пр. Кавальери}}{=} mC = \int_{X \times Y} f dm$$

2. f — ступенчатая, ≥ 0

$$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{C_k} \quad f_x = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{(C_k)_x}$$

f_x — измерима при почти всех x

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x$$

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum \alpha_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum \alpha_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$ — измеримая. $f = \lim g_n$ ($f(x, y) = \lim g_n(x, y)$ при всех (x, y)), где g_n возвращают, $g_n \geq 0$, g_n — ступенчатые

$$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x$$

$\implies f_x$ — измеримая на Y

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)}$$

— верно т.к. $(g_n)_x \leq (g_{n+1})_x$. $\varphi_n(x)$ — измерима $\implies \varphi$ — измерима*

Заметим что $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \dots$ почти везде

$$\int_X \varphi(x) d\mu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \lim \int_X \varphi_n d\mu = \lim \int_{X \times Y} g_n d\mu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \int_{X \times Y} f dm$$

□

2.26 Формула для Бета-функции

Пример.

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx \quad s, t > 0$$

Тогда

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^{s-1} y^{t-1} e^{-x} e^{-y} dy \right) dx \stackrel{y=u-x}{=} \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx = \\ &= \int \dots d\lambda_2 = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} dx \right) du = \\ &\stackrel{x=u \cdot v}{=} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 (uv)^{s-1} (u-uv)^{t-1} e^{-u} \cdot u dx \right) du = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left(\int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du = B(s, t)\Gamma(s+t) \end{aligned}$$

□

2.27 Объем шара в \mathbb{R}^m

Пример. Объем(мера) шара в \mathbb{R}^m .

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \lambda_m(B(0, 1)) \quad \lambda_m(B(0, r)) = r^m \cdot \alpha_m \\ B(0, 1) &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\} \\ B(0, 1)_{x_m} &= \{x \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 \leq 1 - x_m^2\} \\ \alpha_m &= \int_{-1}^1 \lambda_{m-1}(B(0, \sqrt{1-y^2})) dy = \int_{-1}^1 \alpha_{m-1} (1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy = \\ &= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \alpha_{m-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \alpha_{m-1} \\ \alpha_m &= \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \cdot \dots \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}}_{m-1} \cdot \underbrace{\alpha_1}_2 = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \cdot 2 = \\ \Gamma(x+1) &= x \cdot \Gamma(x) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \\ &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \end{aligned}$$

$m = 3$:

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} = \frac{4}{3}\pi$$

2.28 Формула Грина

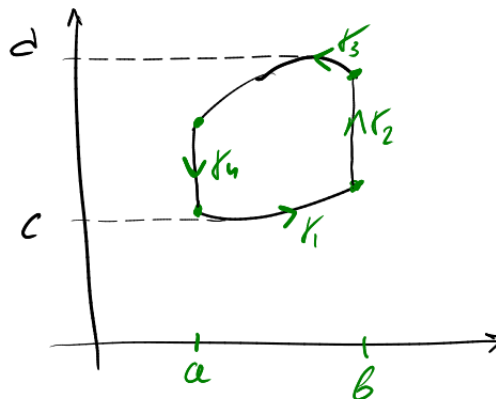
Теорема 2.22.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное, ограниченное
- D — ограничено кусочно гладкой кривой ∂D
- Пусть граница области D ∂D ориентированна, согласована с ориентацией D (против часовой стрелки) — обозначим ∂D^+
- (P, Q) — гладкое векторное поле в окрестности D

Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + Q dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем D — ‘криволинейный 4-х угольник’



∂D — состоит из путей $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, где γ_2, γ_4 — вертикальные отрезки (возможно вырожденные), γ_1, γ_3 — гладкие кривые (можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$). Аналогично можно описать границу по отношению к оси Oy . Проверим, что:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + Q dy$$

Левая часть:

$$-\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x)) dx$$

Правая часть:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_0 + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_0 = \\ & = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_3(x)) dx \end{aligned}$$

□

2.29 #A Формула Стокса

Теорема 2.23 (Формула Стокса).

- Ω — простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3 (двустороннее)
- n_0 — сторона Ω
- $\partial\Omega$ — кусочно гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$ — ориентированная кривая с согласованной ориентацией.
- (P, Q, R) — гладкое векторное поле в окрестности Ω

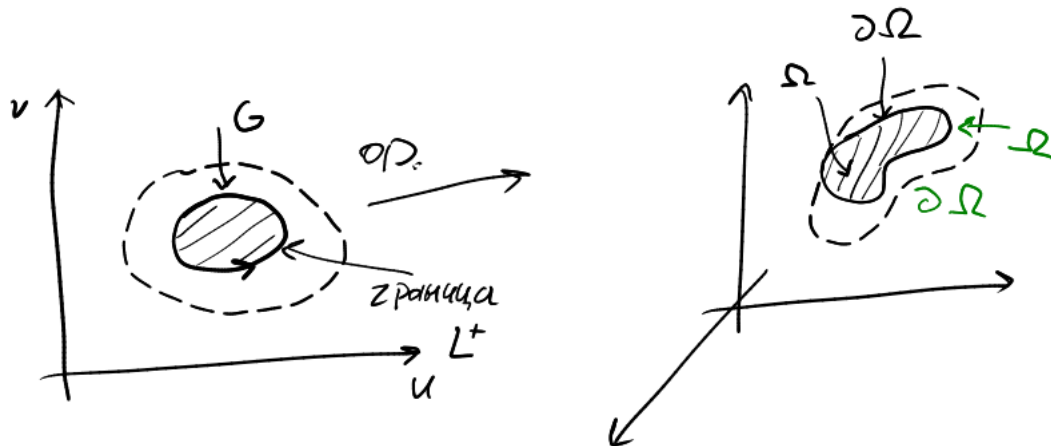
Тогда

$$\int_{\partial\Omega^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\Omega \in C^2$. Достаточно?:

$$\int_{\partial\Omega^+} P dx = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

$$\Phi = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



$$dx dy = -dy dx, dx dx = 0$$

$$dP dx + dQ dy + dR dz = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz) dx + \dots$$

$$\int_{\partial\Omega^+} P dx = \int_{L^+} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \quad (8)$$

Параметризуем: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma = (u(t), v(t))$ — параметризуем L^+

$$\int_{\partial\Omega^+} P dx = \int_a^b P \left(\frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) dt \quad (9)$$

$\Phi \circ \gamma$ — параметризуем $\partial\Omega^+, (\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$9 = \int_a^b P \cdot \frac{\partial x}{\partial u} du + P \cdot \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$\begin{aligned} 8 &= \iint_G \frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv = \\ &= \iint_G (P'_x \cdot x'_u + P'_y \cdot y'_u + P'_z \cdot z'_u) x'_v + P \cdot x''_{uv} - (P'_x \cdot x'_v + P'_y \cdot y'_v + P'_z \cdot z'_v) x'_u - P \cdot x''_{uv} du dv = \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} (z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y} (x'_u y'_v - x'_v y'_u) = \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy \end{aligned}$$

□

2.30 #A Формула Гаусса–Остроградского

Теорема 2.24 (Формула Остроградского).

- $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$
- G — компактно
- ∂G — кусочно гладкая
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- $R: \text{окр.}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V} R dx dy = \iint_{\partial V} 0 dy dz + 0 dz dx + R dx dy$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} &= \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_G R(x, y, F(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\Omega_f} R dx dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R dx dy}_0 \end{aligned}$$

□

Следствие 2.24.10 (обобщение формулы Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

2.31 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

Теорема 2.25 (Пуанкаре').

- Ω — открытый параллелепипед
- A — векторное поле в Ω , $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

Доказательство.

(\Rightarrow) $\operatorname{div} \operatorname{rot} B = 0$

(\Leftarrow) Дано:

$$A_{1x}' + A_{2y}' + A_{3z}' = 0 \tag{10}$$

. Найдем векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, $A = \operatorname{rot} B$. Пусть $B_3 \equiv 0$

$$\left. \begin{aligned} B_{3y}' - B_{2z}' &= A_1 \\ B_{1z}' - B_{3x}' &= A_2 \\ B_{2x}' - B_{1y}' &= A_3 \end{aligned} \right\} \rightsquigarrow \begin{aligned} -B_{2z}' &= A_1 & (1) \\ B_{1z}' &= A_2 & (2) \\ B_{2x}' - B_{1y}' &= A_3 & (3) \end{aligned}$$

(1)

$$B_2 := - \int_{z_0}^z A_1 dz + \varphi(x, y)$$

(2)

$$B_1 := \int_{z_0}^z A_2 dz$$

(3)

$$\begin{aligned} - \int_{z_0}^z A_{1x}' dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^z A_{2y}' dz &= A_3 \xrightarrow{10} \int_{z_0}^z A_{3z}' dz + \varphi'_x = A_3 \\ A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x &= A_3(x, y, z) \Leftrightarrow \varphi'_x = A_3(x, y, z_0) \end{aligned}$$

Отсюда найдем $\varphi = \int_{x_0}^x A_3(x, y, z_0) dx$

□

2.32 Теорема о вложении пространств L^p

Теорема 2.26.

- $\mu E < +\infty$, $1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда

1. $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2. $\|f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

Доказательство.

1. Следует из 2)
2. $r = \infty$

$$\left(\int |f|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq \operatorname{ess\,sup} |f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

$$r < +\infty \quad p := \frac{r}{s}, \quad q = \frac{r}{r-s}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_s^s &= \int_E |f|^s d\mu = \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \leq \left(\int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}} d\mu \right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}} d\mu \right)^{\frac{r-s}{r}} \leq \\ &\leq \|f\|_r^s \mu E^{1 - \frac{s}{r}} \end{aligned}$$

□

2.33 Теорема о сходимости в L^p и по мере

Теорема 2.27 (о сходимости в L^p и по мере).

- $1 \leq p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1. $f \in L^p, f_n \rightarrow f$ в $L^p \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$
2. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (либо $f_n \rightarrow f$ почти везде), $|f_n| \leq g, g \in L^p$
Тогда $f \in L^p$ и $f_n \rightarrow f$ в L^p

Доказательство.

1. $X_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0$$

2. $f_n \xrightarrow{\mu} f, \exists n_k f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде $\implies |f| \leq g$ почти везде
 $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ — суммируема (так как $g \in L^p$)

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

□

2.34 Полнота L^p

Теорема 2.28.

- $L^p(X, \mu)$ — полное
- $1 \leq p < +\infty$

Доказательство. f_n — фундаментальная

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \exists N_1 \forall n_1, k > N_1 \quad \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$$

Возьмем один такой n_1 и зафиксируем:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \exists N_2 > n_1 \forall n_2, k > N_2 \quad \|f_{n_2} - f_k\|_p < \frac{1}{4}$$

Повторим это действие. Получим последовательность (n_k) :

$$\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

Рассмотрим ряд:

$$S(x) = \sum_k |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad S(x) \in [0, +\infty]$$

S_N — частичные суммы ряда S

$$\|S_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

, т.е. $\int_X S_N^p < 1$, по теореме Фату: $\int_X S^p d\mu < 1$, т.е. S^p — суммируема $\implies S$ — почти везде конечна

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

— его частичные суммы — это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. сходимости этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде. Проверим, что $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берем $m = n_k > N$

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

это выполняется при всех больших k . По теореме Фату:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$$

, т.е. $\|f_n - f\| < \varepsilon$ □

2.35 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Лемма 6.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $1 \leq p \leq +\infty$

Множество ступенчатых функций (из L^p) плотно в L^p

Доказательство.

$p = \infty$ $f \in L^\infty$, изменив f на множестве C меры 0, считаем, что $|f| \leq \|f\|_\infty$. Тогда существуют ступенчатые $0 \leq \varphi_n \Rightarrow f^+$, $0 \leq \psi_n \Rightarrow f^-$. Тогда сколько угодно близко к f можно найти ступенчатую функцию вида $\varphi_n + \psi_n$

$p < +\infty$ Пусть $f \geq 0$. $\exists \varphi_n \geq 0$ — ступенчатая: $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p \rightarrow 0$$

, по теореме Лебега. f — любого знака: берем f^+, f^-, \dots □

2.36 Лемма Урысона

Лемма 7 (Урысона).

- X — нормальное
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутые, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная, $0 \leq f \leq 1$, $f|_{F_0} = 0$, $f|_{F_1} = 1$

Доказательство. Перефразируем нормальность: Если $\underbrace{F}_{\text{замк.}} \subset \underbrace{G}_{\text{откр.}}$, то $\exists U(F)$ — открытое:

$$F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$$

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^C \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{G_0^-} \subset \underbrace{F_1^C}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$\overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{G_{\frac{1}{2}}^-} \subset G_1$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом для любого двоично рационального числа $\alpha \in [0, 1]$ найдется множество G_α

$$f(x) := \inf\{\alpha - \text{двоично рациональное} \mid x \in G_\alpha\}$$

Проверим что: f — непрерывно $\Leftrightarrow f^{-1}(a, b)$ — всегда открыто. Достаточно проверить:

1. $\forall b f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

Покажем это:

1.

$$f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q < b \\ q - \text{дв. рац.}}} G_q \text{ — открыто}$$

(\supset) Очевидно: При $x \in G_q$ $f(x) \leq q - b$

(\subset) $f(x) = b_0 < b$ Возьмем $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

2. $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q > a} G_q = \bigcap_{q > a} \overline{G_q}$ — замкнуто

(\supset) Тривиально

(\subset) q, r — двоично рациональные

$$\bigcap_{\substack{q > a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

□

2.37 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

Определение. $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — **финитная**, если $\exists B(0, r) : f \equiv 0$ вне $B(0, r)$.
 $C_0(\mathbb{R}^m)$ — непрерывные финитные функции. $\forall p \geq 1$ $C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Теорема 2.29.

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_{\mathfrak{M}})$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$, $1 \leq p < +\infty$ множество непрерывных финитных функций плотно

Доказательство. Ступенчатые функции плотны в $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$. Достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0 \forall A \subset E$ — ограниченного, $\exists f$ — финитная непрерывная: $\|f - \mathcal{X}_A\|_p < \varepsilon$.

Как потсроить для $\forall h \in L^p$ финитную непрерывную f : $\|h - f\|_p < \varepsilon$? $\exists g$ — ступенчатая:

$$g = \sum_{\text{кон.}} a_k \mathcal{X}_{A_k} \quad \|h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

Подберем f_k : $\|f_k - \mathcal{X}_{A_k}\| < \frac{\varepsilon}{\sum |a_i| \cdot 2}$

$$\|h - f\|_p \leq \|h - g\| + \|g - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum |a_k| \|\mathcal{X}_{A_k} - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \underset{\text{замкн.}}{F} \subset A \subset \underset{\text{откр.}}{G} \quad \lambda_{\mathfrak{M}}(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона $\exists f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная: $f|_F \equiv 1, f|_{G^c} \equiv 0$

$$\|f - \mathcal{X}_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \mathcal{X}_A|^p d\lambda_{\mathfrak{M}} = \int_{G \setminus F} |f - \mathcal{X}_A|^p \leq 1 \cdot \lambda_{\mathfrak{M}}(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

2.38 #А Теорема о непрерывности сдвига

Замечание. Соглашение: $L^p[0, T]$, $T \in \mathbb{R}$ — это пространство можно понимать как пространство T -периодических функций

$$\forall x f(x) = f(x + T)$$

- \tilde{f} — представитель \tilde{f}_1 — еще один
- $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + T)$ почти везде

Удобство: $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$

$$C[a, b] \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$\tilde{C}[0, T]$ — непрерывные T -периодические функции

- $f \in C[0, T]$, $f \in \tilde{C}[0, T] \xrightarrow{\text{т. Кантора}} f$ — равномерно непрерывна
- в $L^p[0, T]$ функции из \tilde{C} образуют плотное множество

Определение.

- $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) := f(x + h)$ — **Сдвиг**

Теорема 2.30 (о непрерывности сдвига).

1. f — равномерно непрерывна.
Тогда $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$,
т.е. $\sup_x |f(x + h) - f(x)| \rightarrow 0$
2. $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < +\infty$
Тогда $\|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
3. $f \in \tilde{C}[0, T]$
Тогда $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
4. $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p[0, T]$
Тогда $\|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Доказательство.

2), 4) $\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L^p[0, T] \exists g$ — непрерывная

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда g — равномерно непрерывна

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|g - g_h\|_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

4)

$$\begin{aligned} \|g_h - g\|_p &= \left(\int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|g_h - g\|_\infty^p \cdot \int_0^T 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= T^{\frac{1}{p}} \cdot \|g_h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

2) g — финитная, $\text{supp } g \in B(0, R)$ Пусть $|h| < 1$

$$\|g_h - g\|_p \leq \|g_h - g\|_{L^p(B(0, R+1), \lambda_m)} \leq \|g_h - g\|_\infty (\lambda_m(B))^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}$$

□

2.39 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

Свойство 1. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \in \mathcal{H}$

Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Свойство 2. $\sum x_k$ — сходится

Тогда $\forall y \in \mathcal{H} \langle \sum x_k, y \rangle = \sum \langle x_k, y \rangle$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=1}^N x_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S \\ \langle S_N, y \rangle &\rightarrow \langle S, y \rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle \\ \langle S_N, y \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y \rangle \end{aligned}$$

— это частичные сумма ряда из правой части

□

Свойство 3. $\sum x_k$ — ортогональный ряд

Тогда $\sum x_k$ — сходится $\Leftrightarrow \sum \|x_k\|^2$ — сходится

Доказательство. $S_N = \sum_{k=1}^N x_k$

$$\|S_N\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, \sum_{j=1}^N x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^N \langle x_k, x_k \rangle = \sum_{k=1}^N \|x_k\|^2$$

$\Rightarrow S_N$ — фундаментальная $\implies S_N$ — фундаментальная в \mathcal{H}

$\Leftarrow S_N$ — сходится в \mathcal{H}

□

2.40 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

Теорема 2.31.

- $\{e_k\}$ — О.С. в \mathcal{H}
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Тогда

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З
2. $c_k := \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$
3. $c_k e_k$ — это проекция x на прямую $\{t e_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$
 $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$

Доказательство.

1. $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$
 $\alpha_n \|e_n\|^2 = 0 \implies \alpha_n = 0$

2.

$$\langle x, e_k \rangle = \sum \langle c_j e_j, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2$$

3.

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k e_k, e_k \rangle = 0$$

□

2.41 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Теорема 2.32 (о свойствах частичных сумм ряда Фурье).

- $\{e_k\}$ — ОС в H
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k \in \mathcal{L}_n = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$$

Тогда

Свойство 1. S_n — проекция x на \mathcal{L}_n , т.е. $x = S_n + z \implies z \perp \mathcal{L}_n$

Доказательство. $k = 1, \dots, n$

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) \|e_k\|^2 = 0$$

□

Свойство 2. S_n — элемент наилучшего приближения для x в \mathcal{L}_n

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$$

Доказательство. $x = S_n + z$

$$\|x - y\|^2 = \left\| \underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n} \right\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

□

Свойство 3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Доказательство.

$$\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$$

□

Следствие 2.32.11 (Неравенство Бесселя).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

2.42 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

Теорема 2.33 (Рисс, Фишер).

- $\{e_k\}$ — ОС в \mathcal{H}
- $x \in \mathcal{H}$

Тогда

1. ряд Фурье вектора x сходится в \mathcal{H}
- 2.

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z \quad z \perp e_k, \forall k$$

- 3.

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Доказательство.

1. Ряд Фурье — ортогональный ряд. Сходимость ряда Фурье \Leftrightarrow сходимость

$$\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$$

Это выполняется по неравенству Бесселя

2. $z = x - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$

$$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum c_k(x) \langle e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \|e_n\|^2 = 0$$

3. (\Rightarrow) Теорема 1.3?

$$(\Leftarrow) \text{ из п.2 } \|x\|^2 = \|\sum c_k(x)e_k\|^2 + \|z\|^2 \implies \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$$

Дано:

$$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \implies z = 0 \implies x = \sum c_k(x)e_k$$

□

2.43 Теорема о характеристике базиса

Теорема 2.34 (о характеристике базиса). $\{e_k\}$ — ОС в \mathcal{H} . Тогда эквивалентны

1. $\{e_k\}$ — базис
2. $\forall x, y$ — выполняется обобщенное уравнение замкнутости
3. $\{e_k\}$ — замкнута
4. $\{e_k\}$ — полная
5. $\text{Cl Lin}(e_1, e_2, \dots)$ — плотна в \mathcal{H} , т.е. $\text{Cl Lin}(e_1, e_2, \dots) = \mathcal{H}$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ $4 \Leftrightarrow 5$

(1 \Rightarrow 2) Берем $x = \sum c_k(x)e_k$ и скалярное умножаем на y :

$$\langle e_k, y \rangle = \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y) \cdot \|e_k\|^2} = \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \dots$$

(2 \Rightarrow 3) $y := x$ в обобщенное уравнение

(3 \Rightarrow 4) $\exists z : \forall n \langle z, e_n \rangle = 0$?, т.е. $c_n(z) = 0$

Для этого z уравнение замыкания $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \|e_k\|^2 = 0$

(4 \Rightarrow 1) по теореме Рисса-Фишера $x = \sum c_k(x)e_k + z$, где $\forall k : z \perp e_k$. В силу полноты ОС $z = 0$

(4 \Rightarrow 5) $\mathcal{L} := \text{Cl Lin}\{e_k\}$. Надо проверить $\mathcal{L} = \mathcal{H}$.

Если $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, то по теореме Рисса-Фишера как в предыдущем пункте $z = 0$, т.е. $x \in \mathcal{L}$

(5 \Rightarrow 4) Если $z \perp$ всем $e_k \implies z \perp \text{Lin}\{e_k\} \implies z \perp \mathcal{L}$, но $\mathcal{L} = \mathcal{H} \implies z \perp z$, т.е. $\langle z, z \rangle = 0$

□

2.44 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Лемма 8. Дан тригонометрический ряд (вещественный или комплексный). Пусть $S_n \rightarrow f$ в $L^1[-\pi, \pi]$ ($\|S_n - f\|_1 = \int_{[-\pi, \pi]} |S_n - f| \rightarrow 0$)

Тогда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

или

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt$$

Доказательство. Докажем для a_k . Пусть $n \geq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos kt \, dt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kt \, dt = \pi a_k$$

При $k = 0$: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cdot 1 = \pi a_0$

$$\left| \pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(t) - f(t)) \cos kt \, dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| \, dt = \|S_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

□

2.45 Теорема Римана–Лебега

Теорема 2.35 (Римана-Лебега).

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\int_E f(t) e^{i\lambda t} \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

$$\int_E f(t) \cos \lambda t \rightarrow 0$$

$$\int_E f(t) \sin \lambda t \rightarrow 0$$

В частности $f \in L^1[-\pi, \pi]$ $a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$

Доказательство. н.у.о $E = \mathbb{R}$ [пусть $f = 0$ на E]

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} \, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda(t - \frac{\pi}{\lambda})} e^{i\pi} \, dt = - \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{\lambda}) e^{i\lambda\tau} \, d\tau$$

Значит

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} \, dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} \, dt$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} \, dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| \cdot |e^{i\lambda t}| \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

По Лемме о непрерывности сдвига

□

2.46 Три следствия об оценке коэффициентов Фурье

Следствие 2.35.12. Пусть

$$\omega(f, h) = \sup_{\substack{x, y \in E \\ |x-y| \leq h}} |f(x) - f(y)|$$

— модуль непрерывности. Если $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \omega(f, \frac{\pi}{k})$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |2c_{-k}(f)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{k}\right) \right| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right) dt = \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right) \end{aligned}$$

□

Следствие 2.35.13.

- $E \subset \mathbb{R}, E = \langle a, b \rangle$

Класс Липшица: $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1]$

$$\text{Lip}_M^\alpha(E) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y \ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \right\}$$

Пусть $f \in \text{Lip}_M^\alpha$, тогда при $k \neq 0$

$$|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$$

Доказательство. $f \in \text{Lip}_M^\alpha \implies \omega(f, h) \leq Mh^\alpha$.

□

Следствие 2.35.14.

1. $f \in \tilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi]$
Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |c_k(f)| \leq \frac{\text{const}}{|k|^r}$
2. $f \in \tilde{C}^{(r)}, f^{(r)} \in \text{Lip}_M^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$
Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$

Доказательство. Проведем эксперимент, после которого доказательство станет очевидным $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$, тогда при $k \neq 0$

$$a_k(f') = kb_k(f)$$

$$b_k(f') = -ka_k(f)$$

$$c_k(f') = ikc_k(f)$$

— интегрирование по частям

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left(f(t) e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot ik \cdot e^{ikt} dt \right)$$

□

2.47 Принцип локализации Римана

Теорема 2.36 (принцип локализации Римана).

- $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) = g(x)$

Тогда Ряды Фурье f и g ведут себя одинаково в точке x_0 :

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Замечание. Переформулировка:

- $h := f - g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $h \equiv 0$ на $x_0 - \delta, x_0 + \delta$

Тогда $S_n(h, x_0) \rightarrow 0$

Доказательство.

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) (\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где

$$h_1(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t)$$

Это рассуждение верно если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$

- Для h_2 — очевидно
- Для h_1 : $h_1 \equiv 0$ при $t \in (-\delta, \delta)$

$$|h_1(t)| \leq |h(x_0 + t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \in L^1$$

Тогда $b_n(h_1) \rightarrow 0$, $a_n(h_2) \rightarrow 0$ по теореме Римана-Лебега

□

2.48 #A Признак Дини. Следствия

Теорема 2.37 (признак Дини).

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$ (или \mathbb{C})

Пусть

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)|}{t} dt < +\infty \tag{11}$$

Тогда ряд Фурье f сходится к S в точке x_0 , т.е. $S_n(f, x_0) \rightarrow S$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t) \quad \varphi(t) \in L^1 \\ S_n(f, x_0) - S &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0 \dots = \\ &= \int_0^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \varphi(t) \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2) \end{aligned}$$

, где

$$h_1 = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} & t \in [0, \pi] \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t) & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

Доказываемое утверждение следует из теоремы Римана-Лебега, если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$
 $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$? — да, по формуле 11

$$\operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t} \quad \frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_1| = \int_0^{\pi} |h_1| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} < \int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$$

— по 11 □

Следствие 2.37.15.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$

Пусть существует четыре конечных предела: $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$

$$\alpha_{\pm} := \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$$

Тогда ряд Фурье f в точке x_0 сходится к $S = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Доказательство.

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е. $\frac{\varphi(t)}{t}$ — ограничена вблизи 0 на $[0, \pi]$ \implies по замечанию 1, интеграл 11 □

Следствие 2.37.16.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- f — непрерывна в точке x_0
- \exists конечный односторонние производные в точке x_0 (либо f дифференцируема в x_0)

Тогда $S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$

Доказательство. Следует из 2.37.15 □

2.49 Корректность определения свертки

Свойство 4. *Корректность определения*

$$g(x, t) = f(x - t) \cdot k(t)$$

1. Проверим, что $\varphi(x, y) := f(x - t) -$ измерима как функция $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, тогда и $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измерима. Обозначим $a \in \mathbb{R} \quad E_a := \mathbb{R}(f(x) < a)$

$$V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$$

— измеримо в $\mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}^2(\varphi < a)$ — тоже измеримо в \mathbb{R}^2

2. $g \in L^1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$?

$$\iint_{[-\pi, \pi]^2} |g(x, t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt |k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t)| dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1$$

Тогда по теореме Фубини для интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)k(t) dt$$

— при почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ этот интеграл существует (и конечен?) и задает по x функцию из $L^1(-\pi, \pi)$, т.е. $f * k$ определен при почти всех $x, \in L^1[-\pi, \pi]$

2.50 Свойства свертки

Свойство 1. $f * k = k * f$

Доказательство. $t := -t$ □

Свойство 2. $c_n(f * k) = 2\pi \cdot c_n(f) \cdot c_n(k)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f * k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t) \cdot e^{-inx} dt dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} k(t)e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)} dx dt = 2\pi c_n(f) \cdot 2\pi c_n(k) \end{aligned}$$

□

Свойство 3.

- $f \in L^p[-\pi, \pi]$
- $k \in L^q[-\pi, \pi]$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \leq p \leq +\infty$

Тогда $f * k$ — непрерывная функция и $\|f * k\|_{\infty} \leq \|k\|_q \cdot \|f\|_p$

Доказательство. Неравенство очевидно — это неравенство Гельдера

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t) dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \cdot |k(t)| dt \leq \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |k(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|k\|_q \end{aligned}$$

Непрерывность:

$$|f * k(x+h) - f * k(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))k(t) dt \right| \leq \|k\|_q \cdot \|f_h(x) - f(x)\|_p$$

□

Свойство 4.

- $f \in L^p[-\pi, \pi] \quad 1 \leq p \leq +\infty$
- $k \in L^1[-\pi, \pi]$

Тогда $f * k \in L^p[-\pi, \pi]$

$$\|f * k\|_p \leq \|k\|_1 \cdot \|f\|_p$$

2.51 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

Теорема 2.38. K_h — а.е.

$$1. f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \implies f * K_h \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{[-\pi, \pi]} f$$

$$2. f \in L^1[-\pi, \pi] \implies \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{} 0$$

3. K_h — усиленная а.е. $f \in L^1[-\pi, \pi]$, f — непрерывная в x

Тогда

- $f * K_h$ — непрерывна в x
- $f * K_h(x) \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{} f(x)$

Доказательство.

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h(t) dt$$

M — из АЕ2

1. $\varepsilon > 0$, f — равномерно непрерывна

$$\exists \delta > 0 \forall t, |t| < \delta \forall x |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$|f * K_h(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)| dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0 \xrightarrow{\text{АЕ3}} \exists V(h_0) \forall h \in V(h_0) I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. $f \in L^1$, $K_h \in L^\infty \implies f * K_h$ — непрерывна

Для данного x проверим утверждение $\varepsilon > 0$; $I_1 + I_2 < \varepsilon$; $\exists V(h_0) \forall h \in V(h_0)$
 f — непрерывна в x

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, |t| < \delta |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)| dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)| dt \\ \leq \text{ess sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

, т.е. $\exists V(h_0) \forall h \in V(h_0) I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$

2.

$$\|f * K_h - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h(t) dt \right| dx \leq \\ \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)| dx dt = \\ = \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt$$

, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|$ — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$= \|K_h\|_1 \left(g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|} \right) (0)$$

— по п.1 $g(0) = 0$

□

2.52 Теорема о перманентности метода средних арифметических

Теорема 2.39.

$$\sum a_n = S \implies \sum a_n \stackrel{\text{с.а.}}{=} S$$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N, |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k - S) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| = \\ = \frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^n |S_k - S|}{n+1}$$

$\exists N \forall n > N$ эта дробь $< \frac{\varepsilon}{2}$

□

2.53 Теорема Фейера

Замечание.

$$S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt$$

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t) dt$$

, где $\Phi_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + \dots + D_n) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}$ — **ядро Фейера**

Теорема 2.40 (Фейера).

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$

Тогда $\sigma_n(f) \xrightarrow{[-\pi, \pi]} f$

2. $f \in L^p[-\pi, \pi] \implies \|\sigma_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$

3. $f \in L^1, f$ — непрерывна в $x \implies \sigma_n(f, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

Доказательство. Проверим: Φ_n — усиленная а.е. и тогда 1-3 следуют из свойства а.е.

АЕ1 $\Phi_n \in L^1$, т.к. Φ_n — непрерывная (и даже $\Phi_n \in L^\infty$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$$

АЕ2 следует из АЕ1, поскольку $\Phi_n \geq 0$

АЕ3 $t \in E_\delta$

$$0 \leq \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

2.54 Следствия из теоремы Фейера

Следствие 2.40.17. $f \in L^1[-\pi, \pi]$ — непрерывна в x . Если ряд Фурье f сходится в точке x

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) \text{ — конечный}$$

, то $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$

Доказательство.

$$\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

и по теореме Коши

□

Следствие 2.40.18.

1. Тригонометрическая система полна в $L^2[-\pi, \pi]$

2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \forall k a_k(f) = 0, b_k(f) = 0$ либо $\forall k \in \mathbb{Z} C_k(f) = 0$

Тогда $f = 0$ почти везде

Доказательство.

1. Следствие из 2.: $\forall k f \perp \cos kx$ и $f \perp \sin kx$

$$0 = \langle f, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx = \pi a_k(f)$$

, т.е. $a_k = 0$

2. $S_n(f) = 0$ почти везде, $\sigma_n(f) = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде

□

Следствие 2.40.19. $f \in L^2[-\pi, \pi]$

Тогда ряд Фурье f сходится к f в L^2 :

$$S_n(f) \rightarrow f \text{ в } L^2 \quad \|S_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0$$

— общее свойство базиса

Следствие 2.40.20. $f \in L^1[0, \pi]$. Коэффициенты f по системе $\{\cos kx\}$ равно 0

Тогда $f = 0$ почти везде

Аналогично для $\{\sin kx\}$

Следствие 2.40.21 (теорема Вейерштрасса). Тригонометрический полином плотный в $L^p[-\pi, \pi]$ и $\tilde{C}[-\pi, \pi]$, $1 \leq p < +\infty$

Следствие 2.40.22. $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ Тогда выполняются равенства Парсеваля:

1.

$$\int_{[pi, \pi]} f \bar{g} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \overline{c_k(g)}$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi \sum |c_k(f)|^2$$

3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} fg = \pi \left(\frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g) \right)$$

4.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi \left(\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right)$$

2.55 Теорема об интегрировании ряда Фурье

Лемма 9. $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$ — ядро Дирихле

Тогда $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$\left| \int_0^x D_n(t) dt \right| < 2$$

Теорема 2.41. $f \in L^1[-\pi, \pi]$

Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx$$

Доказательство. Достаточно доказать: $-\pi \leq a < b \leq \pi$, $\chi = \chi_{[a,b]}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx &= \sum \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \cdot 2\pi c_{-k}(\chi) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot S_n(\chi, t) dt \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \chi = \int_a^b f \\ S_n(\chi, t) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \chi(t) \end{aligned}$$

при $t \in [-\pi, \pi]$, $t \neq a, b$ по признаку Дини

$$S_n(\chi, t) = \int \chi \cdot D_n = \int_a^b D_n(x-t) = \int_0^{b-t} D_n(x) dx - \int_0^{a-t} D_n(x)$$

по лемме $|S_n(x, t)| \leq 4$. Таким образом

$$f \cdot S_n \rightarrow f \cdot \chi \text{ — почти везде}$$

$$|f \cdot S_n| \leq \underbrace{4 \cdot |f|}_{\text{сумм.}}$$

Работает условие теоремы Лебега.

□

2.56 Лемма о слабой сходимости сумм Фурье

Теорема 2.42 (о 'слабой' сходимости рядов Фурье). $f \in L^1[-\pi, \pi] \forall u \in \tilde{C}^1[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x) \cdot u(x) dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)u(x) dx$$

Доказательство.

1. $f \in L^1$ u — непрерывна $\implies u \in L^\infty \implies f * u$ — непрерывная и даже гладкая

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f * u)(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(x-t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u'_x(x-t) dt \end{aligned}$$

— обобщенный предел Лейбница

2.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x)u(x) dx &= \sum_{k=-n}^n c_k(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x) dx \xlongequal[\underline{u}(x):=u(-x)]{} \\ &= \sum c_k(f)c_k(\underline{u}) \cdot 2\pi = \sum_{k=-n}^n c_k(f * \underline{u}) = \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k(f * \underline{u})e^{ikx} \Big|_{x=0} \rightarrow f * \underline{u} \Big|_{x=0} = \end{aligned}$$

— по признаку Дини

$$= f * \underline{u}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)u(-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(t) dt$$

□