Лекции по Математическому анализу 4 семестр

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Оглавление

Лекция 1

1.1 Теория меры

Лемма 1 (о структуре компактного оператора)**.** *$V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор, т.е.* $\det V \neq 0$
Тогда:

- *$\exists$ ортонормированные базисы $g_1, \dots, g_m$; $h_1, \dots, h_m$*
- *$\exists S_1, \dots, S_m > 0$*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$ — разложение по базису
При этом $|\det V| = S_1 S_2 \dots S_m$

Доказательство. $W := V^* V$ $*$ — транспонирование в $\mathbb{R}^m$
W — самосопряженный оператор(матрица симметрична относительно диагонали)
Собственные числа $c_1, \dots, c_m$ — вещественные
Собственные векторы $g_1, \dots, g_m$
Заметим что:

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0 \Rightarrow c_i > 0$$

- $S_i := \sqrt{c_i}$
- $h_i := \frac{1}{S_i} V g_i$

$$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{S_i S_j} \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i$$

, где δ_i — символ Кронекера (0 если $i \neq j$, 1 иначе)

$$V(x) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, g_i \rangle g_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) = \sum S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 = \det(V^* V) = \det W = c_1 \dots c_m \tag{1.1}$$

1.1 — т.к. диагональная матрица $\square$

Теорема 1.1.1 (преобразование меры лебега при линейном отображении)**.**

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда:

- $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$
- $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

$(\det V = 0)$ $\mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ мера $= 0$

$(\det V \neq 0)$ $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера
μ — инвариантна относительно сдвигов

$$\mu(E+a) = \lambda(V(E+a)) = \lambda(V(E) + Va) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k \cdot \lambda$(Лемма из предыдущего семестра)
Q — единичный куб на векторах g_i и $V(g_i) = S_i h_i$, $V(Q) = \{\sum \alpha_i S_i h_i | \alpha_i \in [0,1]\}$ — паралеллепипед со сторонами $S_i, \ldots, S_m$

□

1.2 Интеграл

1.2.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — **разбиение множества**
2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если
   $\exists$ разбиение:
   $$X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \ \forall i \ f\big|_{e_i} = const = c_i$$
   При этом такое разбиение — **допустимое разбиение**

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X$ $\mathcal{X}_E(x) = \left[\begin{array}{ll} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{array} \right.$
2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

Замечание.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые
   Тогда $\exists$ разбиения, допутимые и для f, и для g
   $$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i} \quad h = \sum_{\text{кон.}} b_k \mathcal{X}_{A_k}$$
   $$f = \sum_{i,k} c_i \mathcal{X}_{e_i \cap A_k} \quad g = \sum b_k \cdot \mathcal{X}_{e_i \cap A_k}$$

2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$
   Тогда $f+g,\ \alpha f,\ fg,\ max(f,g),\ min(f,g),\ |f|$ — ступенчатые

Определение.

- $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $a \in \mathbb{R}$

$E(f<a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество функции** f
$E(f \le a),\ E(f>a), E(f \ge a)$ — также лебеговы множества
Если f задана на X: $X(f<a),\ X(f \le a), \dots$ — лебеговы множества

Замечание. $E(f \ge a) = E(f<a)^C$; $E(f<a) = E(f \ge a)^C$

$$E(f \le a) = \bigcap_{b>a} E(f<b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f — **измерима на множестве** E:
$\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f<a)$ — измеримо(т.е. $\in \mathfrak{A}$)

Обозначение.

- f — измерима на X — говорят просто "измерима"
- $X = \mathbb{R}^m$, мера Лебега — измеримо по Лебегу

Замечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f<a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \le a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f>a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \ge a)$ — измеримо

Пример.

1. $E \subset X$, E — измеримо, $\mathcal{X}_E$ — измеримо

$$E(\mathcal{X}_E < a) = \left[\begin{array}{ll} \emptyset & ,a<0 \\ X \setminus E & ,0 \le a \le 1 \\ X & ,a>1 \end{array}\right.$$

2. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывна. Тогда f — измеримо по Лебегу

Замечание. Свойства:

1. f — измерима на E

   $\Rightarrow\ \forall a \in \mathbb{R}\ E(f = a)$ — измеримо

   $\not\Leftarrow\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \mathcal{X} + \mathcal{X}_{\text{неизм.}}$

2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in R \quad \alpha f$ — измерима

3. f — измерима $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$

4. f — измерима на E; $\underset{\text{изм.}}{E'} \subset E \Rightarrow f$ — измерима на E'

$$E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$$

5. $f \neq 0$ — измерима на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима на E

6. $f \geq 0$, измерима на E, $\alpha \in \mathbb{R}$. <u>Тогда</u> f^α — измерима на E

Теорема 1.2.1. f_n — измерима на X.
<u>Тогда</u>:

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n; \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ — измеримы

2. $\overline{\lim} f_n; \quad \underline{\lim} f_n$ — измеримы

3. Если

$$\forall x\ \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = h(x)$$

   , то $h(x)$ — измеримо

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$

2. $$(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf\{s_n : s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)\}$$

3. очев.

□

1.2.2 Меры Лебега-Стильеса

Определение.

- $\mathbb{R}$
- $\mathcal{P}^1$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастает, непрерывна

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ-конечный объем

$$g(a+0) = \lim_{x \to a+0} g(x)$$

$$g(a-0) = \lim_{x \to a-0} g(x)$$

$$\mu[a, b) := g(b-0) - g(a-0)$$

— тоже σ-конечная мера
Применим теорему о продолжении, получим меру μg на некой σ-алгебре — **мера Лебега-Стилтьеса**

Определение. $g(x) = \lceil x \rceil$
Пусть μg определена на Борелевской σ-алгебре — **мера Бореля-Стилтьеса**

Лекция 2

2.1 Теореия меры

2.1.1 Измеримые функции

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ имзмерима
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad X(f < a) \in \mathfrak{A}$
- $\mathcal{X}_E \quad \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$

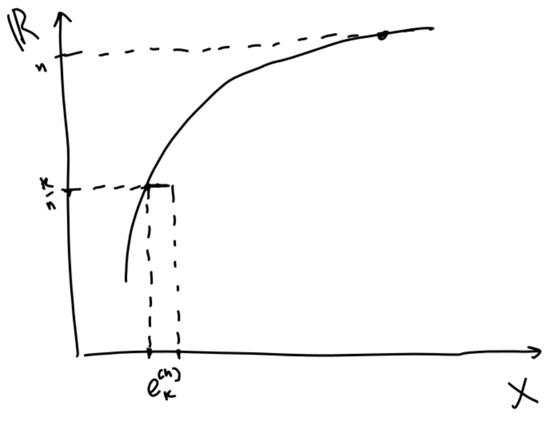
Теорема 2.1.1 (характеризация измеримых функции с помощью ступенчатых)**.**

- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2. $\forall x f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

Доказательство.



$$e_k^{(n)} = X(\frac{k-1}{n} \le f \le \frac{k}{n}) \quad k = 1, \dots, n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \le f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \ge 0 \quad \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

Следствие 2.1.1.1. f — имзерима
Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая, $f_n \xrightarrow{n \to +\infty} f$ всюду и $|f_n| \le |f|$

Следствие 2.1.1.2. f, g — измеримы
Тогда fg — измемрима $(0 \cdot \infty = 0)$

Доказательство.

- $f_n \to f$
- $g_n \to g$
- f_n, g_n — ступеначтые

$f_n g_n$ — ступенчатая $f_n g_n \to fg$ □

Следствие 2.1.1.3. f, g — измеримы
Тогда $f + g$ — измерима

Доказательство. $f_n \to f \quad g_n \to g$, (f_n, g_n) — ступеначтые
$f_n + g_n$ — ступенчатая $f_n + g_n \to f + g$
Считаем что $\forall x$, не может быть $f(x) = \pm\infty, \ g(x) = \mp\infty$ □

- $A \subset X$
- A — полная мера
- $\mu(X \setminus A) = 0$

Теорема 2.1.2 (об измеримости непрерывной на множестве полной меры)**.**

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима

Доказательство. f — измерима на E'
$E'(f < a)$ — открыто в E'

$$\left.\begin{array}{c} e(f < a) \subset e \\ \lambda_m \text{ — полная} \end{array}\right\} \Rightarrow e(f < a) \text{ — измерима в } E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

Пример.

- $E = \mathbb{R}$
- $f = \mathcal{X}_{\mathrm{Irr}}$

Следствие 2.1.2.4.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : E \to \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $E' = E \setminus e$
- f — измерима на E'

Тогда можно так переопределить f на множестве e, что полученая функция $\tilde{f}$ будет измерима на E

Доказательство. Пусть:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in E \\ const & , x \in e \end{cases}$$

$$E(\tilde{f} < a) = E'(\tilde{f} < a) \cup e(\tilde{f} < a)$$

□

Следствие 2.1.2.5. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — монотонна
Тогда f — измерима

Доказательство. f — непрерывна на $\langle a, b\rangle$ за исключением возможно счетного числа точек
□

2.1.2 Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верное **при почти всех** $x \in E$

= **почти всюду** на E

$=$ **почти везде** на E

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$ — истино при $x \in E \setminus e$

Пример. $x = \mathbb{R}$, x — иррационально

Пример. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ при почти всех $x \in E$
$\exists e, \mu e = 0$, при $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

Замечание. Свойства:

1. - μ — полная
   - $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
   - $f_n(x) \to f(x)$ почти везде на X
   - f_n — измерима

   Тогда f — измерима

   Доказательство. $f_n \to f$ на X', где $e = X \setminus X', \mu e = 0$
   f — измерима на X'
   μ — полная $\Rightarrow$ f — измерима на X

   $$X(f < a) = \underset{\text{изм.}}{X'(f < a)} \cup e(f < a)$$

   □

2. В условии п. 1
   Можно переопределить f на e. Получится $\hat{f}$
   $f_n(x) \to \hat{f}(x)$ почти везде
   $\hat{f}$ — измерима

   Определение. $f = g$ почти везде
   Будем говорить что f и g **эквивалентны**

3. Пусть $\forall n \ W_n(x)$ — истинно при почти всех x
   Тогда утверждение "$\forall n \ W_n(x)$ — истинно" — верно при почти всех x
   Это высказывание верно при

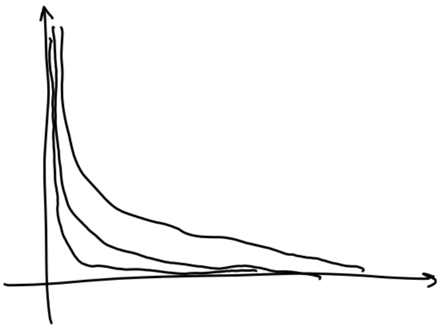
   $$x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i\right) \quad \mu\left(\bigcup e_i\right) = 0$$

Определение.

- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечные
- f_n **сходится к** f **по мере**
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Замечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0
Т.е. предел не задан однозначно

Пример.



$f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0$
X $\mathbb{R}_+$ λ
$f_n \to f$ всюду на $(0, +\infty)$
$f_n \underset{\lambda}{\Rightarrow} f$

Пример.

$f_n(x) := e^{-(n-x)^2}$ $x \in \mathbb{R}$
$f_n(x) \to 0$ при всех x
$f_n(x) \to 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = const \not\to 0$$

, при $0 < \varepsilon < 1$

Пример. $n = 2^k + e, 0 \leq e < 2^k$
$X = [0,1]$ λ
$f_n(x) := \mathcal{X}_{[\frac{e}{2^k}, \frac{e+1}{2^k}]}$
$\lim f_n(x)$ — не существует ни при каких x

$$\lambda X(f_n > \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$f_n \underset{\lambda}{\Rightarrow} 0$$

Теорема 2.1.3 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные

- $f_n \to f$ почти везде
- μX — конечна

Тогда $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду
Частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0(т.е. $f \equiv 0$)

$$\left.\begin{array}{c} X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывность меры сверху}$$

Общий случай: $f_n \to f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда $\varphi_n \to 0$, монотонна

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

Теорема 2.1.4 (Рисс).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

Тогда $\exists n_k f_{n_k} \to f$ почти везде

Доказательство. $\forall k\ \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \to 0$
$\exists n_k$: при $n > n_k$ $\mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$
можно считать: $n_1 < n_2 < n_3$
Проверим $f_{n_k} \to f$ почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$

$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

При $x \notin E$ $f_{n_k} \to f$

$$x \notin E\ \exists N\ x \notin E_k$$

при $k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, т.е. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ □

Следствие 2.1.4.6.

- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$

- $|f_n| \le g$ почти везде

Тогда $|f| \le g$ почти везде

Доказательство. $\exists n_k : \ f_{n_k} \to f$ почти везде □

Теорема 2.1.5 (Егорова)**.**

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \to f$ почти везде

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset X, \ \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$

2.2 Интеграл

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Определение.

- $f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$
- E_k — дополнительное разбиение
- $\alpha_k \ge 0$

$$\int_X f d\mu := \sum \alpha_k \mu E_k$$

, считаем $0 \cdot +\infty = 0$

Замечание. Свойства:

1. Не зависит от представления f в виде суммы

$$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k} = \sum \alpha'_k \mathcal{X}_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k \cap E'_j}$$

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. $f \le g \quad \int f \le \int g$, f, g — ступенчатые

Определение. $f \ge 0$ — измерима

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \le g \le f}} \int g d\mu$$

Замечание. Свойства:

1. Если f — ступенчатая то Опр. 2 = Опр. 1
2. $0 \le \int f \le +\infty$
3. $g \le f$, f — измерима, g — ступенчатая $\Rightarrow \int_X g \le \int_X f$

Определение.

- f — измерима
- $\int_X f^+$ или $\int_x f^-$ конечный

Тогда

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

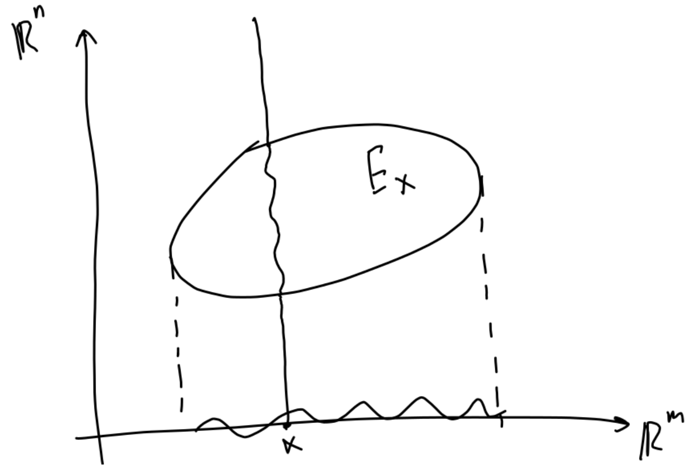
Теорема 2.2.1 (Тонелли)**.**

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$ — измерима
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Тогда

1. при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ — измерима на $\mathbb{R}^n$
2. функция
$$x \mapsto \int_{E_k} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$$
— измеримая
3. $$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Обозначение. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$



Лекция 3

3.1 Интеграл

Определение.

1.
   - $f \geq 0$, ступенчатые
   - $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{E_k}$, E_k — измеримое

$$\int_X f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2.
   - $f \geq 0$, измеримая

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ — ступ.}}} \int_X g d\mu$$

3.
   - f — измерима
   - $f^+, f^- \geq 0$ — измеримые

   Пусть $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечные
   Тогда $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$
   Если $\int_X f^+$, $\int_X f^-$ — оба конечные, то f называется **суммируемой**

   Замечание. f — измеримая, ≥ 0, интеграл 3 = интеграл 2

4.
   - $E \subset X$ — измеримое
   - f — измерима на X

$$\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E$$

Замечание.

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \quad \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$$

Замечание.

$$\int_E f d\mu = \sup\{fg : \ 0 \le g \le f \text{ на } E, g \text{ — ступенчатые}\}$$

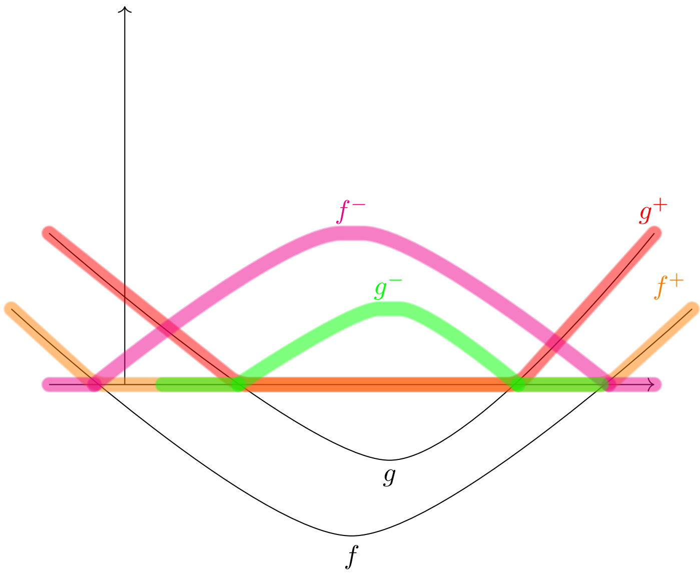
, можно считать что g — тождественный 0 вне множества E

Замечание. $\int_E f$ не зависит от значений f вне E

Замечание. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \subset X$ — измеримое, g, f — измеримые. Свойства:

1. Монотонность $f \le g$ $\int_E f \le \int_E g$

   Доказательство.



   (a) $f, g \ge 0$ — очевидно

   (b) f, g — произвольные
   $f^+ \le g^+$ $f^- \ge g^-$
   $\int_E f^+ \le \int_E g^+$ $\int_E f^- \ge \int_E g^- \Rightarrow$ OK

   □

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E; \int_E 0 d\mu = 0$

3. $\mu E = 0$ $\int_E f = 0$

   Доказательство.

   (a) f — ступенчатая

   (b) $f \ge 0$ — измеримая

   □

Замечание:
f — измеримая. Тогда f — суммируемая $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

($\Leftarrow$) следует из свойства 1. $f^+, f^- \le |f|$

($\Rightarrow$) позже

4. $\int_E (-f) = -\int_E f,\ \forall c \in \mathbb{R}\ \ \int_E cf = c\int_E f$

   Доказательство.

   (a) $(-f)^+ = f^-\ \ (-f)^- = f^+$

   (b) можно считать $c > 0$ для $f \ge 0$ — тривиально

   □

5. $\exists \int_E f d\mu$
   Тогда $|\int_E f d\mu| \le \int_E |f| d\mu$

   Доказательство. $-|f| \le f \le |f|$. По свойствам 1 и 4 □

6. $\mu E \le +\infty,\ a \le f \le b$
   Тогда $a\mu E \le \int_E f \le b\mu E$

   Доказательство. $a\chi_E \le f \le b\chi_E$, тривиально □

   Следствие 3.1.0.7. f — измерима на E, f — ограничена на E, $\mu E < +\infty$
   Тогда f — суммируемая на E

7. f — суммируемая на E. Тогда f — почти везде конечная

   Доказательство.

   (a) $f \ge 0$ $f = +\infty$ на $A \subset E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_E f \ge n\mu A$

   (b) $f = f^+ - f^-$

   □

Лемма 2.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

— *измеримые,* g — *ступенчатая,* $g \ge 0$
Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\int_A g d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} = \sum_i \sum_k \dots = \sum_i \int_{A_i} g d\mu$$

□

Теорема 3.1.1.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая на A
- $f \geq 0$

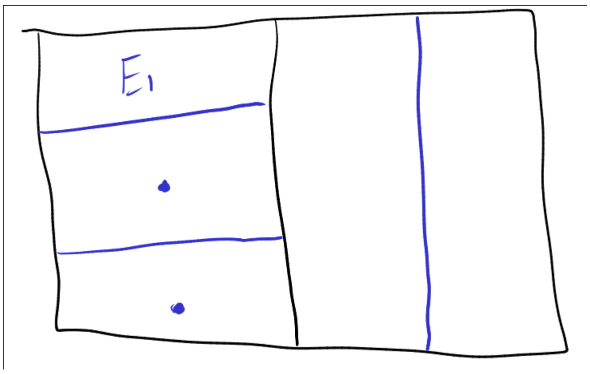
Тогда $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$

Доказательство.

($\leq$) ступенчатая $g:\ 0 \leq g \leq f\ \int_A g = \sum \int_{A_i} g d\mu \leq \sum \int_{A_i} f$ — по Лемме

($\geq$) 1. $A = A_1 \cup A_2$
$0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}\ 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A2}$, g_1, g_2 — ступенчатые

$$g_1 = \sum \alpha_k \chi_{E_k}\ g_2 = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$



Считаем что E_k – совместное разбиение

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f\chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2 \leq \int_A f$$

Перейдем к супремуму интегралов g_1, g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ — индукция по n

3.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \sqcup B_n$$

, где

$$B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

□

Следствие 3.1.1.8.

- $f \geq 0$ — измеримая
- $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$
- $\nu E := \int_E f d\mu$

Тогда ν — мера

Следствие 3.1.1.9 (аддитивности интеграла). f — суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. Объединяем два сходящихся ряда для f^+ и f^- □

3.1.1 Предельный переход под знаком интеграла

$f_n \to f$. Можно ли утверждать $\int_E f_n \to \int_E f$?
Пример. $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$ $f \equiv 0$ $f_n \to f$ (даже $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$)

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 3.1.2 (Леви)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, f_n — измеримая
- $\forall n$ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде
- $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ почти везде

Тогда $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Замечание. f — задана всюду, кроме множества меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e
Тогда f — измерима на X.

Доказательство.

($\le$) очевидно. $f_n \le f$ почти везде $\int f_n \le \int f$

$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \int_e f_n = \int_{X\setminus e} f_n \le \int_{X\setminus e} f \le \int_X f$$

($\ge$) Достаточно $\forall g$ — ступенчатая $0 \le g \le f$

$$\lim \int_X f_n \ge \int_X g$$

Достаточно $\forall c \in (0,1)$

$$\lim \int_X f_n \ge c \int_X g$$

$$E_n := X(f_n \le cg) \quad \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$ т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \ge \int_{E_n} f_n \ge c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \ge c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \int_X g$

Последнее равентсво справедливо в силу непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

$\square$

Теорема 3.1.3. $f, g \ge 0$ измеримы на E

Тогда

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k},\ \ g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \ge 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $f_n :\ 0 \le f_n \le f_{n+1} \le \dots\ \lim f_n = f$
   $g \ge 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $g_n :\ 0 \le g_n \le g_{n+1} \le \dots\ \lim g_n = g$

$$f_n + g_n \to f + g \quad \int_E f_n + g_n \to \int_E f + g$$

$$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_E g = \int_E f + g$$

$\square$

Следствие 3.1.3.10. f, g — суммируемы на E

Тогда $f + g$ — суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Замечание. Свойство 3 доказано

Доказательство. Суммируемость $|f+g| \le |f| + |g|$
$h = f + g$. Тогда:

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

$$\Rightarrow \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+$$

$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

$$\int_E h = \int_E f + \int_E g$$

□

Определение. $\mathcal{L}(X)$ — множество функций суммируемых на X

Следствие 3.1.3.11. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ — это линейный функционал на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X)\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X); \ \int_X \sum \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_X f_k$$

Теорема 3.1.4 (об интегрировании положительных рядов)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая
- $u_n \ge 0$ почти везде

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. по т. Леви: $S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$
$0 \le S_n \le S_{n+1} \le \dots\ S_n \to S$ — сумма ряда $\sum u_n$
Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$

$$\int_E S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k \to \int_E S$$

□

Следствие 3.1.4.12. u_n — измеримые $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$
Тогда ряд $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходится при почти всех x

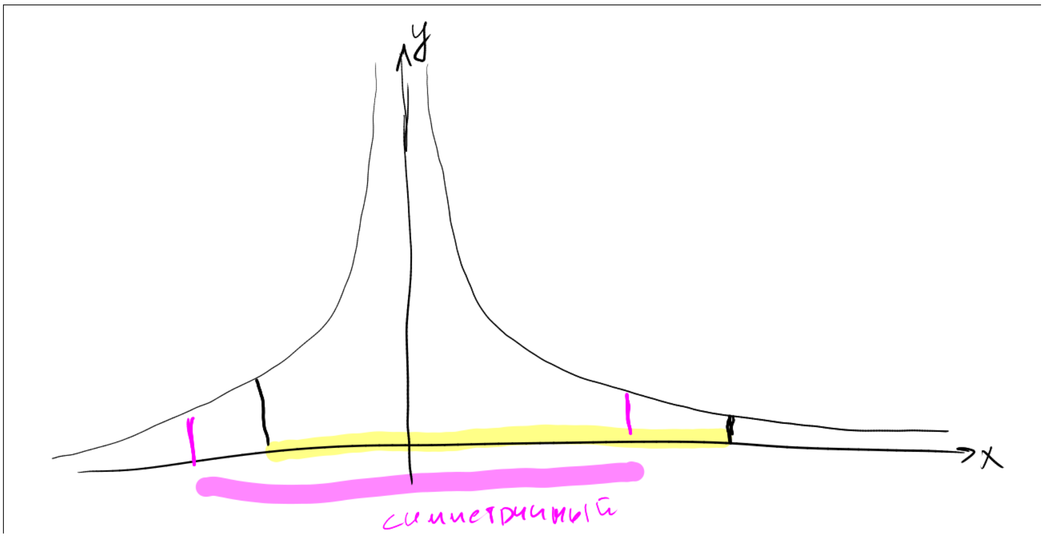
Доказательство. $S(x) := \sum |u_n(x)| \ge 0$ — измеримая

$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow S$ — суммируема $\Rightarrow S$ почти везде конечна □

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произведение последовательности; $\sum a_n$ — абсолютно сходится
Тогда $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде



$$\int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} = \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} dx = |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

$$\leq |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{N} \cdot |a_n|$$

$$\sum_n \int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq 4 \int_N \sum |a_n| < +\infty$$

□

Лекция 4

Теорема 4.0.1 (об абсолютной непрерывности интеграла)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E$ — измеримое, $\mu E < \delta \quad |\int_E f| < \varepsilon$

Следствие 4.0.1.13.

- f — суммируемая
- $\mu E_n \to 0$

Тогда $\int_{E_n} f \to 0$

Доказательство. Возьмем множества $X_n := X(|f| \geq n)$, очевидно что $X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$, а также $\mu(\bigcap X_n) = 0$
Утвержение: $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ — это свойство непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, тода при $\mu E < \delta$

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f| \leq \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X^C_{n_\varepsilon}} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

Правда ли что:

$$f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f \quad \forall \varepsilon > 0\ \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$$

эквивалентны.

(⇒) **Нет**. $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$
$f_n = \frac{1}{nx}\ f_n \underset{\lambda}{\rightrightarrows} 0$
$\int |f_n - f| = +\infty$ — при всех n

(⇐) **Да**.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - 1|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Теорема 4.0.2 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n\ |f_n| \le g$ почти везде
  2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируема в силу 1, f — суммируема по следствию т. Рисса: $|f| \le g$ почти везде
'тем более' $= \left|\int_X f_n - \int_X f\right| \le \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$ фиксируем ε $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$
   $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \to 0$
   $$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$$
   $$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^C} \le \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^C} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon\mu X$$
   По следствию т. об абсолютной непрерывности: $\int_{X_n} 2g \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. $\mu X = +\infty$
   Проверим утверждение: $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subset X$ — измеримое, μA — конечная: $\int_{X\setminus A} g < \varepsilon$
   $$\int_X g = \sup\{\int g_n,\ 0 \le g_n \le g,\ g_n \text{ — ступенчатая}\}$$
   $$A := \{x:\ g_n(x) > 0\}$$
   — при достаточно больших n
   $$0 \le \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X\setminus A} g < \varepsilon$$
   Фиксируем $\varepsilon > 0$
   $$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X\setminus A} \le \int_A |f_n - f| + \int_{X\setminus A} 2g$$
   По 1 $\int_A |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\int_{X\setminus A} 2g < 2\varepsilon$
   т.е. при больших n $\int_x |f_n - f| d\mu < 2\varepsilon$

□

Теорема 4.0.3 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n\ |f_n| \leq g$ почти везде
  2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство.

$$h_n := \sup(|f_n - f|,\ |f_{n+1} - f|,\ \dots)$$

- $0 \leq h_n \leq 2g$
- h_n — монотонно убывает
- $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде

$2g - h_n \geq 0$ — эта последовательность возрастает, $2g - h_n \to 2g$ почти везде

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \to 0$$

□

Пример.

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{x\to x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} dt$$

Да. $t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow[x\to x_0]{} t^{x_0-1}e^{-t}$ при всех $t > 0$

Суммируемая мажоранта: $|t^{x-1}e^{-t}| \leq \underbrace{t^{\alpha-1}e^{-t}}_{\text{сумм.}}$, $0 < \alpha < x_0$

Теорема 4.0.4 (Фату)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n \geq 0$ — измеримая
- $f_n \to f$ почти везде
- $c > 0\ \forall n\ \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Замечание. Здесь не требуется чтобы $\int_X f_n \to \int_X f$, это может быть не выполнено

Доказательство.
$$g_n := \inf(f_n,\ f_{n+1},\ \dots)$$
$$0 \le g_n \le g_{n+1}\ \ \lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ почти везде}$$
$$\int_X g_n \le \int_X f_n \le c$$
$$\int_X g_n \to \int_X f \Rightarrow \int_X f \le c$$

□

Следствие 4.0.4.14.

- $f_n, f \ge 0$ — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \Rightarrow f$
- $\exists c > 0\ \forall n \int_X f_n \le c$

Тогда $\int_X f \le c$

Доказательство.
$$f_n \Rightarrow f \Rightarrow \exists n_k\ f_{n_k} \to f \text{ почти везде}$$

□

Следствие 4.0.4.15.

- $f_n \ge 0$ — измеримые

Тогда
$$\int_X \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство. Как в теореме:
$$\int_X g_n \le \int_X f_n$$
Выберем n_k:
$$\int_X f_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underline{\lim} \int_X f_n$$
Рассмотрим первое неравенство для n_k:
$$\int_X g_{n_k} \le \int_X f_{n_k}$$
$$\int_X g_{n_k} \to \int_X \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int_X f_n$$

□

4.1 Плотность одной меры по отношению к другой

4.1.1 Замена перменных в интеграле

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \cdot)$
- $\Phi : X \to Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле: $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$. Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$
Тогда ν — мера:

$$\nu(\bigsqcup E_n) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E)n) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом** μ **при отображении** Φ и

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$$

Замечание.

- $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима относительно $\mathfrak{B}$

Тогда $f \circ \Phi$ — измерима относитльно $\mathfrak{A}$ ($f \circ \Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$)

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(\underbrace{Y(f < a)}_{\in \mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}$$

Определение.

- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима(на X относительно $\mathfrak{A}$)
- $\omega \geq 0$

$$\forall B \in \mathfrak{B} \ \nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

— **взвешенный образ меры** μ при отображении Φ, ω — **вес**

Теорема 4.1.1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$
- ν — взвешенный образ меры μ при отображении Φ с весом ω
- $\omega \geq 0$ — измерима на X

Тогда $\forall f$ — измеримые на Y относительно $\mathfrak{B}$, $f \geq 0$
$f \circ \Phi$ — измеримая на X относительно $\mathfrak{A}$ и

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x)\, d\mu(x) \tag{4.1}$$

То же верно для суммируемых f

Доказательство. $f \circ \Phi$ — измеримая

1. Пусть $f = \mathcal{X}_B, B \in \mathfrak{B}$

$$f \circ \Phi(x) = f(\Phi(x)) = \left[\begin{array}{ll} 1 & ,\Phi(x) \in B \\ 0 & ,\Phi(x) \notin B \end{array} \right. = \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда 4.1:

$$\nu B \stackrel{?}{=} \int_X \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

— это определение ν

2. f — ступенчатая. 4.1 следует из линейности интеграла

3. $f \geq 0$ — измеримая: теорема об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми + т. Леви

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots,\ h_i \text{ — ступенчатая } h_i \leq f\ h_i \to f$$
$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow[i\to\infty]{} 4.1 \text{ для } f$$

4. f — измеримая $\Rightarrow$ для $|f|$ выполнено 4.1 $\Rightarrow$ $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ — суммируемы одновременно
Берем f_+, f_-, для них интегралы конечные.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega$$

□

Следствие 4.1.1.16. В условиях теоремы:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f — суммируемая на B

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega(x) d\mu$$

Доказательство. В теорему подставить $f \leftrightarrow f \cdot \mathcal{X}_B$ □

Замечание. Частный случай.

- $X = Y$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$
- $\Phi = \mathrm{Id}$
- $\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$, $\omega \geq 0$ — измеримая

В этой ситуации ω — плотность(меры ν относительно меры μ) и тогда по теореме:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x)\omega(x) d\mu$$

Лекция 5

5.1 Плотности

Определение. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — меры
Плотность меры ν **онситительно** μ — это функция $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}},\ \omega \geq 0$ — измеримая
$\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$

Теорема 5.1.1 (критерий плотности)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu),\ \nu$ — еще одна мера
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}},\ \omega \geq 0$ — измеримая

Тогда ω — плотность ν отнсительно $\mu \Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathfrak{A}\ \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A \omega$$

Пример (нет плотности).

- $X = \mathbb{R}$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}'$
- $\mu = \lambda_1$
- ν — одноточечная мера $\nu(A) = \left[\begin{array}{ll} 1 & ,\text{если } 0 \in A \\ 0 & ,\text{иначе} \end{array} \right.$
  считаем $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$

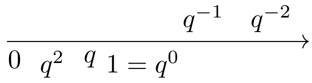
Теорема 5.1.2 (Необходимое условие существования плотности)**.** $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Теорема 5.1.3 (теорема Радона-Никодина)**.** Это так-же достаточное условие

Доказательство критерия плотности.

$(\Rightarrow)$ очевидно

$(\Leftarrow)$ Не умаляя общности $\omega > 0 : e = X(\omega = 0)$
$\nu(e) = \int_e \omega d\mu = 0$
Для случая когда $A \cap e = \emptyset$ все только лучше
Фиксируем $q \in (0, 1)$
$A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$



$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \le \nu A_j \le \mu A_i \cdot q^{j-1} \tag{5.1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \le \int_{A_j} \omega d\mu \le \mu A_j \cdot q^{j-1} \tag{5.2}$$

Тогда

$$q \cdot \int_A \omega d\mu \le q \cdot \sum \int_{A_j} \le \sum q^j \mu A_j \le \sum \nu A_j \le \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \le \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} = \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

то есть:

$$q \int_A \omega \, d\mu \le \nu A \le \frac{1}{q} \int_A \omega \, d\mu$$

и $q \to 1 - 0$

$\square$

Лемма 3.

- *f, g — суммируемые*
- *$(X, \mathfrak{A}, \mu)$*
- *$\forall A \in \mathfrak{A}$: $\int_A f = \int_A g$*

Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство. $h := f - g$
Дано $\forall A \int_A h = 0$
Доказать $h = 0$ почти везде

- $A_+ := X(h \ge 0)$
- $A_- := X(h < 0)$

$X = A_+ \sqcup A_-$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$$

$$\int_{A_-} |h| = -\int_{A_-} h = 0$$

тогда

$$\int_X |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ почти везде $\square$

Замечание. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство отображений $l_A : f \mapsto \int_A f d\mu$ — линейный функционал
Таким образом множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ — разделяет точки
$\forall f, g \in \mathcal{L}(X) \exists A l_A(f) \ne l_A(g)$

5.2 Мера лебега

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $a \in O$
- $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$

Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$
Тогда $\exists \delta > 0\ \forall$ *куба* $Q \subset B(a, \delta),\ a \in Q$
выполняется неравенство $\lambda\Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Замечание. Здесь можно считать что кубы замкнутые

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L \cdot (x - a) + o(x - a) \quad x \to a$$
$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o(x - a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар} B_\varepsilon(a)\ \forall x \in B_\varepsilon(a)\ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a) a \in Q$ — куб со стороной h. При $x \in Q :\ |x - a| \leq \sqrt{m}h$

$$|\Psi(x) - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$: при $x, y \in Q$

$$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \leq (1 + 2\varepsilon)h$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq \underbrace{|\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m}_{\text{выбираем } \varepsilon \text{ чтобы } \ldots < c} \lambda Q$$

потом берем $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ □

Лемма 5.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — *открытое*
- $f : O \to \mathbb{R}$ — *непрерывное*
- $Q \subset \overline{Q} \subset O$ — *кубическая ячейка*
- $A \subset Q$

Тогда

$$\inf_{\substack{G: A\subset G \\ G\text{ — открытое } \subset O}} \left(\lambda(G)\sup_G f\right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Теорема 5.2.1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \in O$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)|\, d\lambda(x)$$

Доказательство. Обозначим якобиан $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
$\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера. Т.е. надо доказать: J_Φ — плотность ν относительно λ. Тогда достаточно проверить условие критерия плотности

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \le \nu A \le \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5.3}$$

Достаточно проверить только правое неравенство. левое — это "правое для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1}"

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \le \lambda A$$

1. Проверяем второе неравенство 5.3 для случая когда A — кубическая ячейка. $A \subset \overline{A} \subset O$. От противного:
$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$$
Возьмем $C > \sup_Q J_\Phi :\ C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$. Запускаем процесс половинного деления: Режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую"ячейку $Q_1 \subset Q$: $C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берем $Q_2 :\ C \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и так далее
$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{5.4}$$
$$a \in \bigcap \overline{Q_i} \quad C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi,\ \text{ в частности } C > |\det \Phi'(a)|$$
Получаем противоречие с леммой: в сколь угодно малой окрестности a имеются кубы $\overline{Q_n}$, где выполняется 5.4. **Противоречие**

2. Проверим второе неравенство 5.3 для открытых множеств $A \subset O$
Это очевидно $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q_j} \subset A$
$$\nu A = \sum \lambda Q_j \le \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \le \sup_A J_\Phi \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{5.5}$$

3. По лемме второе неравенство 5.3 выполнено для всех измеримых A
$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \overline{Q_j} \subset O$$
$$A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j} \quad A_j \subset G \text{ — открытое}$$
$$\nu A_j \le \nu G \le \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \le \inf_{\substack{A_j \subset G \\ G\text{ — откр.}}} (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично 5.5 получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$ $\square$

Теорема 5.2.2.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall f$ — измеримых, ≥ 0, заданных на $O' = \Phi(O)$

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda$$

, где $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$. То же верно для суммируемых функций f

Доказательство. Применяем теорему о взвешенном образе меры.
Дано:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(T, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$ — с сохранением измеримости
- $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$
- $\omega : Y \to \mathbb{R},\ \geq 0$, измеримый
- ν — взвешенный образ μ с весом ω:

$$\mu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

В нашем случае

- $X = Y = \mathbb{R}^m$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$
- Φ — диффеоморфизм
- $\mu = \lambda$
- $\nu(A) = \lambda \Phi(A)$

Под действием гладкого отображния Φ, σ-аглебра $\mathfrak{M}^m$ сохраняется
По теореме

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(A)} J_\Phi d\lambda$$

т.е. λ — взвешенный образ исходной меры Лебега по отношению к Φ $\square$

Пример. Полярные координаты в R^2.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Phi : \{(r,\varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \to \mathbb{R}^2$$

— диффеоморфизм

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det\Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_\Omega f(x,y) = d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \underset{d\lambda_r(r,\varphi)}{d\lambda_r}$$

Пример. Сферические координаты в R^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \quad \left[\begin{array}{c} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi? & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\det\Phi' = r^2(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi) = r^2\cos\psi = J_\Phi$$

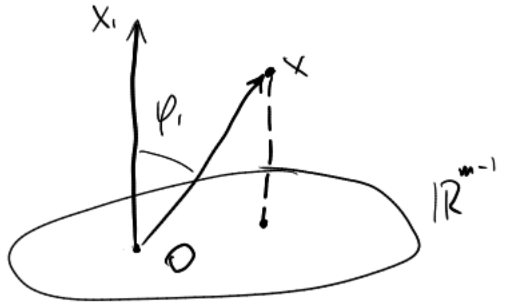
— для географических координат: r — растояние от центра Земли, ψ — угол к плоскости экватора

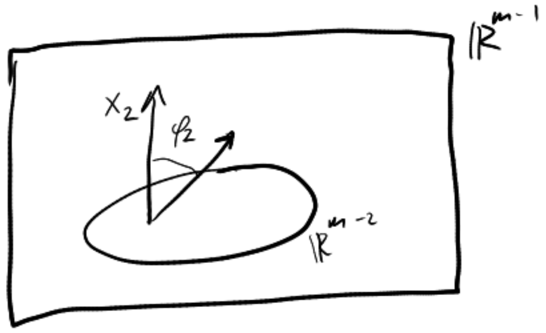
Лекция 6

6.1 Сферические координаты в R^m

Пример.

- $r, \varphi_1, \dots \varphi_{m-1}$
- $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}^{m-1} \supset \dots \supset \mathbb{R}^2$ В кажои из очередных пространств $\mathbb{R}^k$ фиксируем ортогональное к $\mathbb{R}^{k-1}$
- φ_1 — угол между $\overline{e_1}$ и $Ox \in [0, \pi]$
- φ_2 — угол между $\overline{e_2}$ и $P_{2_{(e_2\ \dots\ e_m)}}(x) \in [0, \pi]$
- $\vdots$
- φ_{m-1} — просто полярный угол в $\mathbb{R}^m$





$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$x_3 = 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$$

$$\vdots$$

$$x_{m-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$$

$$x_m = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$$

$$J = r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}$$ [1]

Сделаем в цикле эти координаты:

шаг 1 $x_m = \rho_{m-1}\sin\varphi_{m-1}$
$x_{m-1} = \rho_{m-1}\cos\varphi_{m-1}$
$(x_1\ \dots\ x_n) \rightsquigarrow (x_1\ \dots\ x_{m-2},\ \rho_{m-1},\ \varphi_{m-1})$

шаг 2 $\rho_{m-1} = \rho(m_2)\sin\varphi_{m-2}$
$x_{m-2} = \rho_{m-2}\cos\varphi_{m-2}$
$(x_1\ \dots\ x_{m-2},\ \rho_{m-1},\ \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1\ \dots\ x_{m-3},\ \rho_{m-2},\ \varphi_{m-2},\ \varphi_{m-1})$

$\vdots$

последний шаг $(x_1,\ \rho_2,\ \varphi_2\ \dots\ \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r,\ \varphi_1\ \dots\ \varphi_{m-1})$
$\rho_2 = r\sin\varphi_1$
$x_1 = r\cos\varphi_1$

$$\lambda_m(\Omega) = \int\limits_{\Omega} 1 d\lambda_m \overset{}{\underset{1\text{ шаг}}{=\!=\!=}} \int\limits_{\Omega_1}\rho_{m-1} \underset{2\text{ шаг}}{=\!=\!=} \int\limits_{\Omega_2}\rho_{m-2}^2\sin\varphi_{m-2} \underset{3\text{ шаг}}{=\!=\!=} \int\limits_{\Omega_3}\rho_{m-3}^3\sin^2\varphi_{m-3}\sin\varphi_{m-2}d\lambda =$$

$$= \dots = \int\limits_{\Omega_{m-1}} r^{m-1}\sin^{n-2}\varphi_1\dots\sin\varphi_{m-2}$$

6.2 Произведение мер

Лемма 6.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — $п/к \Rightarrow \mathfrak{A}\times\mathfrak{B} = \{A\times B \subset X\times Y | A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B}\}$ — $п/к$

Пример. Ячейки: В $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$ $\mathfrak{A}\in\mathcal{P}^1,\ \mathfrak{B}\in\mathcal{P}^1$
$A\times B$ — ячейка из $\mathcal{P}^2$

Обозначение. $\mathcal{P} = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ — множества из этой системы называются измеримыми прямоугольниками

Определение. $m_0(A\times B) = \mu A\cdot\nu B$ — недоделанная **мера измеримого прямоугольника**

Теорема 6.2.1.

1. m_0 — мера на $\mathcal{P}$
2. ν, μ — σ-конечные $\Rightarrow m_0$ — тоже σ-конечная

Доказательство.

[1] В R^3 “географические“ координаты $J = r^2\cos\psi$

1. $?m_0$ — счетно аддитивна $?m_0 P = \sum m_o P_k$, если

$$A \times B = P = \bigsqcup P_k, \text{ где } P_k = A_k \times B_k$$

Наблюдение: $\mathcal{X}_{A\times B}(x,y) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(y)$
Тогда $\mathcal{X}_P = \sum \mathcal{X}_{P_k}$, т.е.

$$\forall x \in X, y \in Y \quad \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y) = \sum \mathcal{X}_{A_k}(x)\mathcal{X}_{B_k}(y)$$

проинтегрируем по y по мере ν:

$$\mathcal{X}_A(x)\nu B = \sum \mathcal{X}_A(x) \cdot \nu B_k$$

Интегрируем по x:

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$$

2. Очев. μ — σ-конечная $\Rightarrow X = \bigcup X_k$, μX_k — конечная ν — σ-конечная $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n$, νY_k — конечная

$$X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n \quad m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n \text{ — конечная}$$

$\Rightarrow m_0$ — σ-конечная мера

□

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 с п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на σ-алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

Определение. $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \nu \times \mu)$ — **произведение пространств с мерой** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

Замечание.

1. Это произведение ассоциативно
2. σ-конечность нужна для единственности произведения

Теорема 6.2.2. $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{n+m}$

Доказательство. Без доказательсва □

Определение.

- X, Y — множества
- $C \subset X \times Y$

$$C_x := \{y \in Y | (x, y) \in C\}$$
$$C^y := \{x \in X | (x, y) \in C\}$$

Замечание.

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcup (C_\alpha)_x$$
$$\left(\bigcap_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcap_\alpha (C_\alpha)_x$$
$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

Теорема 6.2.3 (Кавальери)**.**

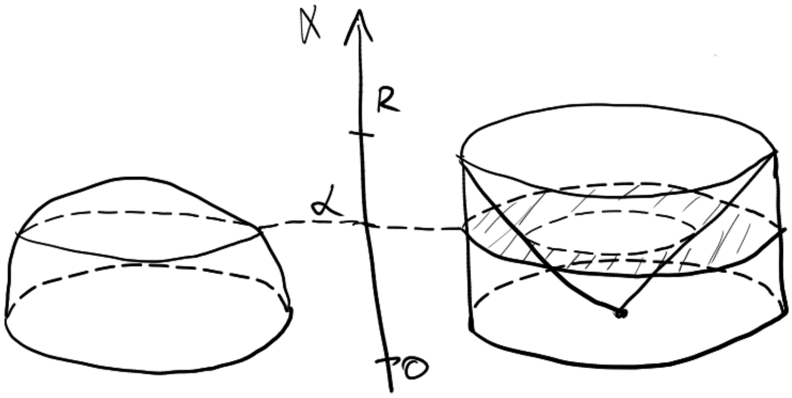
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- ν, μ — σ-конечные, полные
- $m := \mu \times \nu$

Пусть $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$
Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая[2] функция на X
3. $mC = \int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y

Пример. Половину шара сопоставляем с конусом.



[2]функция задана при почти всех x. Она равна почти везде некоторой измеримой функции, которая задана на всем X. Это “не мешает“ утверждению 3

- $C_x =$круг
- $C_x =$кольцо

$$\lambda(C_x) = \pi(R^2 - x^2)$$
$$\lambda(C_x) = \pi R^2 - \pi x^2$$
$$\nu(\frac{1}{2}\text{шара}) = \nu(\text{цилиндр} \setminus \text{конус}) = \pi R^2 - \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Доказательство. $\mathcal{D}$ — система множеств, для которых выполнено 1. - 3.

1. $C = A \times B \Rightarrow C \in \mathcal{D}$
   (a) $C_x = \begin{bmatrix} \emptyset & x \notin A \\ B & x \in A \end{bmatrix}$
   (b) $x \mapsto \nu(C_x)$ — это функция $\nu B \cdot \mathcal{X}_A$
   (c) $\int \nu(C_x) d\mu = \int\limits_X \nu B \cdot \mathcal{X}_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in \mathcal{D}$ — дизъюнктны $\Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathcal{D}$
   $E_i \in \mathcal{D} \Rightarrow (E_i)_x$ — измеримое почти везде $\Rightarrow$ при почти всех x все $(E_i)_x$ – измеримые
   (a) Тогда при этих x $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$
   (b) $\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\text{измеримая функция}} \Rightarrow$ функция $x \mapsto \nu E_x$ измеримая^2
   (c)
   $$\int\limits_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int\limits_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE$$
3. $E_i \in \mathcal{D},\ E_1 \supset E_2 \supset \dots,\ E = \bigcap\limits_i E_i,\ \mu E_i < +\infty$ Тогда $E \in \mathcal{D}$
   $$\int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — конечная при почти всех } x$$
   (a) $\forall x$ верно $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots,\ E_x = \bigcap (E_i)_x$. Тогда E_x — измеримое при почти всех x и $\lim\limits_{i \to +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при почти всех x
   (b) Таким образом $x \mapsto \nu E_x$ — измеримая^2
   (c)
   $$\int\limits_X \nu E_x d\mu = \lim \int \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$$
   Первое равенство по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: $|\nu(E_i)_x| \le \nu(E_1)_x$ — из^2

Итог: $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathcal{D}$

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$
$$mE = \inf\left\{\sum m_0 P_k | E \subset \bigcup P_k,\ P_k \in \mathcal{P}\right\}$$
— теорема о лебеговском продолжении.
$\exists$ множества H вида $\bigcap\limits_l \bigcup\limits_k P_{kl}$ (т.е. $H \in \mathcal{D}$)
$E \subset H, mH = mE = 0$
$$0 = mH = \int\limits_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x \sim 0 \ (= 0 \text{ при почти всех } x)$$
$E_x \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow$
   (a) E_x — измерима при почти всех x
   (b) $\nu E_x = 0$ почти везде
   (c) $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$
5. C — m-измеримо, $mC < +\infty$ тогда $C \in \mathcal{D}$
$C = H \setminus e$, где H — вида $\bigcap\limits_l \bigcup\limits_k P_{kl},\ me = 0,\ mC = mH$
   (a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — измерима при почти всех x, т.к. ν — полная
   (b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x \Rightarrow$ измерима
   (c) $\int\limits_X \nu C_x d\mu = \int\limits_X \nu H_x d\mu = mH = mC$
6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathcal{D}$
$$X = \bigsqcup X_k,\ \mu X_k < +\infty,\ Y = \bigsqcup Y_j,\ \nu Y_j < +\infty$$
$$C = \bigsqcup (C \cap (X_k \times Y_j)) \text{ — используем 2.}$$

□

Следствие 6.2.3.17. C — измеримое в $X \times Y$. Пусть $P_1(C) = \{x \in X | C_x \neq 0\}$ — проекция C на X. Если $P_1(C)$ — измеримое, то:
$$mC = \int\limits_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Доказательство. при $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$ □

Замечание.

1. C — измеримое $\not\Rightarrow P_1(C)$ — измеримое
2. C — измеримое $\not\Rightarrow \forall x\ C_x$ — измеримо
3. $\forall x \forall y\ C_x, C^y$ — измеримые $\not\Rightarrow C$ — измеримое (пример Серпинского)

Лекция 7

7.1 Принцип Кавальери

Определение. $X\times, \nu, \mu, m$

1. C_x — имзмерима при почти всех x
2. $x \mapsto \nu C_x$ — измерима*
3. $mC = \int\limits_X \mathcal{X}_x d\mu$

Следствие 7.1.0.18. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная
Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f\,d\lambda_1$$

Доказательство. $f > 0$ $\Pi\Gamma(f[a, b])$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^2$. $C_x = [0, f(x)]$ $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lambda_2(\Pi\Gamma) = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

Замечание. λ_2 можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением свойства конечной аддитивности и это продолжение не единственно

Замечание. $\lambda_m, m > 2$ — аналогичным образом продолжить невозможно. Парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского

Замечание. Для замечания 1 и замечания 2 требуется инвариантность меры относительно движения $\mathbb{R}^m$

Определение.

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times T \to$
- $\forall x \in X$ f_x — это функция(сечение) $f_x(y) = f(x, y)$, можно считать что она задана на C_x
- f^y — аналогичное сечение

Теорема 7.1.1 (Тонелли)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечные меры, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ — измерима относительно $A \otimes B$

Тогда

1. при почти всех x f_x — измеримая на Y f^y — измерима на X почти везде
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x d\nu = \int\limits_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измеримая* на X
   $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f^y d\mu$ — измеримая* на Y
3. $\int\limits_{X \times Y} f\, dm = \int\limits_X \varphi d\mu = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$
   $= \int\limits_Y \psi d\nu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство.

1. Пусть $f = \mathcal{X}_C$, $C \subset X \times Y$ — измеримо относительно m. Тогда $f_x(y) = \mathcal{X}_{C_x}(y)$. C_x — измеримо при почти всех $x \implies f_x$ — измерима при почти всех x

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$$

$\varphi(x)$ — измерима (по принципу Кавальери)

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \xlongequal[\text{пр. Кавальери}]{} mC = \int_{X \times Y} f dm$$

2. f — ступенчатая, ≥ 0

$$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{C_k} \quad f_x = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{(C_k)_x}$$

f_x — измерима при почти всех x

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu (C_k)_x$$

$$\int_X \varphi(x) = \sum \alpha_k \int_X \nu (C_k)_x = \sum \alpha_k m C_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$ — измеримая. $f = \lim g_n$ $(f(x, y) = \lim g_n(x, y)$ при всех $(x, y))$, где g_n возрастают, $g_n \geq 0$, g_n — ступенчатые

$$f_x = \lim_{n \to +\infty} (g_n)_x$$

$\implies f_x$ — измеримая на Y

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)}$$

— верно т.к. $(g_n)_x \le (g_{n+1})_x$. $\varphi_n(x)$ — измерима $\implies \varphi$ — измерима*
Заметим что $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le \dots$ почти везде

$$\int_X \varphi(x) \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X\times Y} g_n \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \int_{X\times Y} fdm$$

$\square$

Следствие 7.1.1.19. $C \subset X \times Y$ $P_1(C)$ — измеримо.
Тогда

$$\int\limits_C fdm = \int\limits_{f_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

Теорема 7.1.2 (Фубини)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- ν, μ — σ-конечные
- $m = \nu \times \mu$
- f — суммируема на $X \times Y$ относительно m

Тогда

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x\, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ — суммируема на Y
3. $\int\limits_{X\times Y} f\, dm = \int\limits_X \varphi\, d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$

Доказательство. Без доказательства $\square$

Пример.

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx \quad s,t > 0$$

Тогда

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$$

Доказательство.

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}dy\right)dx =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{s-1}y^{t-1}e^{-x}e^{-y}dy\right)dx \overset{}{\underset{y=u-x}{=\!=\!=}} \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}du\right)dx =$$

$$= \int_{\dots} \dots d\lambda_2 = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{u} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}dx\right)du =$$

$$\underset{x=u\cdot v}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{1} (uv)^{s-1}(u-uv)^{t-1}e^{-u}\cdot u\,dx\right)du =$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1}e^{-u}\left(\int_0^{1} v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,dv\right)du = B(s,t)\Gamma(s+t)$$

□

Пример. Объем(мера) шара в $\mathbb{R}^m$.

$$\alpha_m = \lambda_m(B(0,1)) \quad \lambda_m(B(0,r)) = r^m\cdot\alpha_m$$

$$B(0,1) = \{x\in\mathbb{R}^m \big| x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \le 1\}$$

$$B(0,1)_{x_m} = \{x\in\mathbb{R}^{m-1} \big| x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 \le 1 - x_m^2\}$$

$$\alpha_m = \int_{-1}^{1} \lambda_{m-1}(B(0,\sqrt{1-y^2}))dy = \int_{-1}^{1}\alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{m-1}{2}}dy =$$

$$= 2\alpha_{m-1}\int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = B\left(\frac{m+1}{2},\frac{1}{2}\right)\alpha_{m-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\alpha_{m-1}$$

$$\alpha_m = \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}}_{m-1}\cdot\underbrace{\alpha_1}_{2} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\cdot 2 =$$

$$\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

$m = 3$:

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{4}{3}\pi$$

7.2 Поверхностные интегралы

7.2.1 Поверхностные интегралы I рода

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие. $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация. $E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ по Лебегу

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M | E$ — измеримо$\} = \{\varphi(A) | A \in \mathfrak{M}^2,\ A \subset G\}$

Определение. Мера на $\mathfrak{A}_M$

$$S(E) := \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, dudv$$

Т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ

Замечание. $\mathfrak{A}_M$ — σ-алгебра, S — мера

Замечание. $E \subset M$ — компактное $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(E)$ — компактное $\Rightarrow$ измеримое $\Rightarrow$ замкнутые множества измеримы $\Rightarrow$ (относительно) открытые множества измеримы

Замечание. $\mathfrak{A}_M$ не зависит от φ по теореме о двух параметризациях

Замечание. S не зависит от φ

$$|\overline{\varphi'_s} \times \overline{\varphi'_t}| = |(\overline{\varphi'_u} \cdot u'_s + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_s) \times (\overline{\varphi'_u} \cdot u'_t + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_t)| =$$

$$= |\overline{(\varphi'_u \times \varphi'_v)} \cdot (u'_s \cdot v'_t - v'_s \cdot u'_t)| = |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_t \end{pmatrix} \right|$$

Замечание.

- $f : \mathfrak{M} \to \overline{R}$ — измеримая

$M(f < a)$ — измеримая $\Leftrightarrow$ $N(f \circ \varphi < a)$ — измерима относительно $\mathfrak{M}^2$
f — измерима относительно $\mathfrak{A}_M$ $\Leftrightarrow$ $f \circ \varphi$ — измерима относительно $\mathfrak{M}^2$

Определение (поверхностный интеграл I рода)**.**

- M — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$
- φ — параметризация
- $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема по мере s

Тогда

$$\iint\limits_M f \, ds = \iint\limits_M f(x, y, z) \, ds$$

называется **интегралом I рода от f по многообразию** M

Замечание. По теореме об интегрировании по взвешенному образу меры

$$\iint\limits_M f \, ds = \iint\limits_G f(\varphi(u, v)) |\varphi'_v \times \varphi'_v| \, du \, dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{pmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \sin\alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 \cdot |\varphi'_v|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$E = |\varphi'_u| = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2$$

$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \quad F = |\varphi'_v|^2$$

Лекция 8

- M
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
- f
- $f \circ \Phi$

$$\int_{M/E} dfs = \int_{O/\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi \cdot |\Phi'_u \times \Phi'_v| \, du \, dv$$

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — **кусочно-гладкое** двумерное многообразие, если M — конечное объединение:

- простых гладких двумерных многообразий M_i
- гладких кривых
- точек

Замечание. Просто так сферу параметризовать не можем, но можем разбить ее на две полусферы и окружность и считать отдельно для каждой из них.

Определение. $E \subset M$ — измеримое, если измеримы все $E \cap M_i$.

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

8.1 Поверхностный интеграл II рода

- M — простое гладкое двумерное многообразие в R^3 — поверхность

Определение. Сторона поверхности — непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности

- $M \subset \mathbb{R}^3$
- $W : M \to \mathbb{R}^3$

$\forall x\ W(x)$ — нормаль к M, $|W(x)| = 1$, $W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$

Замечание. Локльно каждая повехность — двустороннее. В общем случае — 1 или 2 стороны

Замечание. График функции $z(x, y)$

$$\Phi : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\Phi'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \quad \Phi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

— касательные векторы

$$n := \Phi'_x \times \Phi'_y = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

— нормаль

$$n_0 = \pm \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\cdots}}, \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \right)$$

Замечание. Другой способ задания стороны поверхности

1. u, v — касательные векторы
   $u \nparallel v$, (u, v) — касательный репе́р
   Если задано непрерывное поле реперов, то они задают сторону $n = u \times v$(отнормировать)
2. Задана петля + указано непрерывное движение

Определение. M — поверхность в $\mathbb{R}^3$, n_0 — сторона, γ — контур(петля) в M — ориентированный.
Говорят, что **сторона поверхности** n_0 **согласована с ориентацией** γ: $(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$, $N_{\text{внутр.}}$ — вектор внутренней нормали к области, ограниченной петлей. Т.е. если ориентация γ задает сторону n_0

Определение.

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M
- $F : M \to \mathbb{R}^3$ — векторное поле(непрерывное)

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle \, ds$$

— **интеграл II рода** векторного поля F по поверхности M

Замечание. Смена стороны = смена знака

Замечание. Не зависит от параметра

Замечание. $F = (P, Q, R)$ обозначается

$$\iint_M P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

Замечание. $\Phi, n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle = \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| \, du \, dv =$$

$$\int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\text{смешанное произведение}} du \, dv \tag{8.1}$$

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle = \det \begin{pmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$8.1 = \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & z'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} du \, dv$$

Пример. График $z(x, y)$ над областью G по верхней стороне

$$\iint_{\Gamma_z} R \, dx \, dy = \iint_{\Gamma_z} 0 \, dy \, dz + 0 \, dz \, dy + R(x, y, z) \, dx \, dy \tag{8.2}$$

$$n_0 = \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\cdots}}, \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \right)$$

$$8.2 = \iint_{\Gamma_z} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}} ds = \iint_G R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy = \iint_G R \, dx \, dy$$

т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции

Следствие 8.1.0.20.

- $V \subset \mathbb{R}^3$
- $M = \partial V$ — гладкая двумерная поверхность
- n_0 — внешняя нормаль

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} z \, dx \, dy = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$$

Следствие 8.1.0.21. Ω — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, M (— цилиндр над Ω) $= \Omega \times [z_0, z_1]$
Тогда (сторона M любая) $\int_M R \, dx \, dy = 0$

8.2 Ряды Фурье

8.2.1 Пространства L^p

Свойство 1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

- $f : X \to \mathbb{C}$
  $f(x) = u(x) + iv(x)$
  $u = \Re f,\ v = \Im f$

- f *— измеримая, если u и v — измеримые*
- f *— суммируемая, и u и v — суммирумые*
- f *— суммируемая: $\int_E f = \int_E u + \int_E v$*

Свойство 2 (Неравенство Гёльдера)**.**

- $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- E *— измеримое*
- $f, g : E \to \mathbb{C}$ *— измеримые*

Тогда

$$\int_E |fg| d\mu \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Свойство 3 (Неравенство Минковского)**.** *Те-же условия что и в Неравенстве Гельдера*

$$\left(\int_E |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Замечание. При $p = 1$ неравенство тоже верно

Свойство 4.

Определение. L^p, $1 \le p \le +\infty$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \subset X$ — измеримое

$$\mathcal{L}^p(E, \mu) := \left\{ f :\ \text{почти везде } E \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \middle| f \text{ — измеримая}, \int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

— это линейное пространство (по неравенству Минковского)
$f, g \in \mathcal{L}^p(E, \mu) : f \sim g \quad f = g$ почти везде($f - g = 0$ почти везде). $\mathcal{L}^p/_\sim = L^p(E, \mu)$ — линейной пространство. Задаем норму $\|f\|_{L^p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Свойство 5.

- $L^\infty(E, \mu)$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- E *— измеримое*

- *f — почти везде $E \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f = \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}} \Big| f \le A \text{ почти везде}\}$$

Свойство 1. $\operatorname{ess\,sup} f \le \sup f$

Свойство 2. $f \le \operatorname{ess\,sup} f$ *почти везде*

Доказательство. $B = \operatorname{ess\,sup} f$
Тогда $\forall n\ f \le B + \frac{1}{n}$ почти везде □

Свойство 3. *f — сумм,* $\operatorname*{ess\,sup}_E |g| < +\infty$
Тогда

$$\left|\int_E fg\right| \le \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$$

Доказательство.

$$\left|\int_E fg\right| \le \int_E |fg| \le \int_E \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot |f|$$

□

Замечание. $L^\infty(E,\mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}),\ \text{изм.}, \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\}/_\sim$. Эквивалентные функции отождествленны — это нормированное пространство

$$\|f\|_{L^\infty(E,\mu)} := \operatorname*{ess\,sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

Замечание. В новых обозначениях. Неравенство Гельдера:

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Здесь можно брать $p = 1,\ q = +\infty$

Замечание. $f \in L^p \Rightarrow f$ — почти везде конечны. $1 \le p \le +\infty \Rightarrow$ можно считать f — задана всюду на E, и всюду конечна

Лекция 9

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

$$\int_a^b f ds \quad \int_a^b \langle F, \gamma' \rangle dt = \int_a^b \langle F, \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \rangle ds$$

Мера на кривой — гладкре 1-мерное многообразие, γ — параметризация. Эта мера — образ меры Лебега в $\mathbb{R}^1$ с весом $|\gamma'|$ — интеграл I рода. Общий случай: Интеграл II рода по $(m-1)$-мерной поверхности в $\mathbb{R}^m$. F — векторное поле

$$\int \langle F, n_0 \rangle dS_{m-1} \quad |\Phi'_u \times \Phi'_v| \text{ — вес}$$

Мера Лебега на k-мерном многообразии в $\mathbb{R}^m$. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_k$, тогда λ_k(Паралеллепипед$(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_k)$) — вес

9.1 Формула Грина

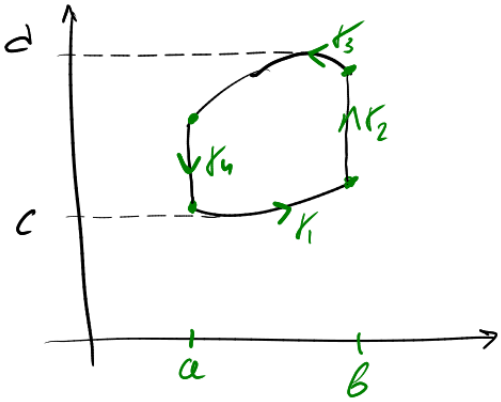
Теорема 9.1.1.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное, ограниченное
- D — ограничено кусочно гладкой кривой ∂D
- Пусть граница области D ∂D ориентированна, согласована с ориентацией D (против часовой стрелки) — обозначим ∂D^+
- (P, Q) — гладкое векторное поле в окрестности D

Тогда

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} P\, dx + Q\, dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем D — ‘криволинейный 4-х угольник‘



∂D — состоит из путей $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, где γ_2, γ_4 — вертикальные отрезки (возможно вырожденнные), γ_1, γ_3 — гладкие кривые(можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$). Аналогично можно описать границу по отношнию к оси Oy. Проверим, что:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} P\, dx + Q\, dy$$

Левая часть:

$$-\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x))\, dx$$

Правая часть:

$$\int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{0} + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_{0} =$$

$$= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\, dx - \int_a^b P(x, \varphi_3(x))\, dx$$

□

Замечание. Теорема верна для любой области D с кусочно гладкой границей, которую можно разрезать на криволинейные 4-х угольнинки

$$\int_{\partial D^+} = \int_{\partial D_1^+} + \int_{\partial D_2^+}$$

Теорема 9.1.2 (Формула Стокса)**.**

- Ω — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ (двустороннее)
- n_0 — сторона Ω

- $\partial\Omega$ — кусочно гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$ — ориентированная кривая с согласованной ориентацией.
- (P, Q, R) — гладкое векторное поле в окрестности Ω

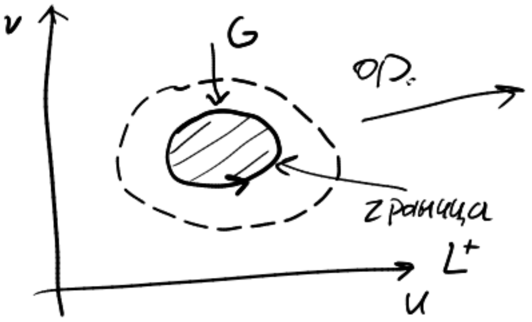
Тогда

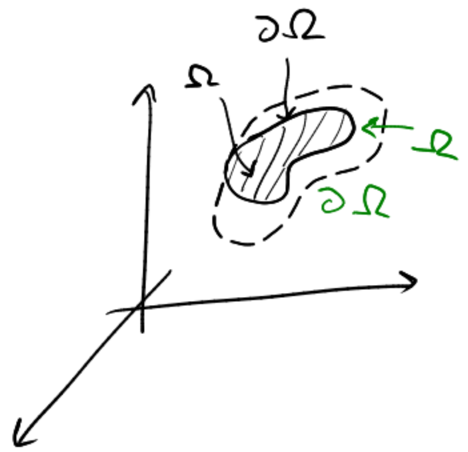
$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\Omega \in C^2$. Достаточно?:

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$\Phi = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$





$dx\,dy = -dy\,dx,\ dx\,dx = 0$

$$dP\,dx + dQ\,dy + dR\,dz = (P'_x\,dx + P'_y\,dy + P'_z\,dz)\,dx + \ldots$$

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \int_{L^+} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) \tag{9.1}$$

Параметризируем: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma = (u(t), v(t))$ — параметризируем L^+

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \int_a^b P\left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v'\right)dt \tag{9.2}$$

$\Phi \circ \gamma$ — парметризируем $\partial\Omega^+$, $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$9.2 = \int_a^b P \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\,du + P \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\,dv$$

$$9.1 = \iint_G \frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) du\,dv =$$

$$= \iint_G (P'_x \cdot x'_u + P'_y \cdot y'_u + P'_z \cdot z'_u)x'_v + p \cdot x''_{uv} - (P'_x \cdot x'_v + P'_y \cdot y'_v + P'_z \cdot z'_v)x'_u - P \cdot x''_{uv}\, du\,dv =$$

$$= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y}(x'_u y'_v - x'_v y'_u) = \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\,dy$$

□

- $L^p(X, \mu)$, $1 \le p \le +\infty$

$$\left(\int_X |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ — сходится}$$

- $p = \infty :\ \operatorname{ess\,sup}|f| < +\infty$

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Теорема 9.1.3.

- $\mu E < +\infty$, $1 \le s < r \le +\infty$

Тогда

1. $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2. $\|f\|_s \le \mu E^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

Доказательство.

1. Следует из 2)
2. $r = \infty$

$$\left(\int |f|^s\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \le \operatorname{ess\,sup}|f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

$r < +\infty$ $p := \frac{r}{s}$, $q = \frac{r}{r-s}$

$$\|f\|_s^s = \int_E |f|^s\, d\mu = \int_E |f|^s \cdot 1\, d\mu \le \left(\int_E |f|^{s\cdot\frac{r}{s}}\, d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}}\, d\mu\right)^{\frac{r-s}{r}} \le$$

$$\le \|f\|_r^s \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

□

Следствие 9.1.3.22.

- $\mu E < +\infty$
- $1 \le s < r \le +\infty$
- $f_n \xrightarrow[L^r]{} f$

Тогда $f_n \xrightarrow[L^s]{} f$

Доказательство.

$$\|f_n - f\|_s \le \mu E^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r}} \cdot \|f_n - f\|_r \to 0$$

□

Теорема 9.1.4 (о сходимости в L^p и по мере).

- $1 \le p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1. $f \in L^p$, $f_n \to f$ в $L^p \implies f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$
2. $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$ (либо $f_n \to f$ почти везде), $|f_n| \le g$, $g \in L^p$
   Тогда $f \in L^p$ и $f_n \to f$ в L^p

Доказательство.

1. $X_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \ge \varepsilon)$
$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p \, d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \to 0$$
2. $f_n \Rightarrow f$, $\exists n_k \; f_{n_k} \to f$ почти везде $\implies |f| \le g$ почти везде
   $|f_n - f|^p \le (2g)^p$ — суммируема (так как $g \in L^p$)
$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow[\text{т. Лебега}]{} 0$$

□

- Фундаментальная последовательность:
  $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall k, n > N \quad \|f_n - f_k\| < \varepsilon$, т.е. $\|f_n - f_k\| \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0$
- $f_n \to f \implies f_n$ — фундаментальная $\|f_n - f_k\| \le \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} + \underbrace{\|f - f_k\|}_{\to 0}$
- $C(k)$ — пространство непрерывных функций на компакте K
  $\|f\| = \max_K |f|$, утверждение: $C(K)$ — полное

Задача 1. $L^\infty(X, \mu)$ — полное

Теорема 9.1.5.

- $L^p(X, \mu)$ — полное
- $1 \le p < +\infty$

Доказательство. f_n — фундаментальная

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists N_1\ \forall n_1, k > N_1 \quad \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$$

Возьмем один такой n_1 и зафиксируем:

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\ \exists N_2 > n_1\ \forall n_2, k > N_2 \quad \|f_{n_2} - f_k\|_p < \frac{1}{4}$$

Повторим это действие. Получим последовательность (n_k):

$$\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

Рассмотрим ряд:

$$S(x) = \sum_k |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad S(x) \in [0, +\infty]$$

S_N — частичные суммы ряда S

$$\|S_N\|_p \le \sum_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

, т.е. $\int_X S_N^p < 1$, по теореме Фату: $\int_X S^p\, d\mu < 1$, т.е. S^p — суммируема $\implies$ S — почти везде конечна

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

— его частичные суммы — это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. схоимость этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \to f$ почти везде. Проверим, что $\|f_n - f\|_p \to 0$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берем $m = n_k > N$

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p\, d\mu < \varepsilon^p$$

это выполняется при всех больших k. По теореме Фату:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$$

, т.е. $\|f_n - f\| < \varepsilon$ $\square$

Определение. Y — метрическое пространство, $A \subset Y$, A — (всюду) плотно в Y

$$\forall y \in Y\ \forall U(y)\ \exists a \in A:\ a \in U(y)$$

Пример. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$

Лемма 7.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \le p \le +\infty$

Множество ступенчатых функций (из L^p) плотно в L^p

Замечание. $\varphi \in L^p$ — ступенчатая $\implies (\varphi \neq 0) < +\infty$

Доказательство.

$p = \infty$ $f \in L^\infty$, изменив f на множестве C меры 0, считаем, что $|f| \le \|f\|_\infty$. Тогда существуют ступенчатые $0 \le \varphi_n \rightrightarrows f^+$, $0 \le \psi_n \rightrightarrows f^-$. Тогда сколько угодно близко к f можно найти ступенчатую фкнцию вида $\varphi_n + \psi_n$

$p < +\infty$ Пусть $f \ge 0$. $\exists \varphi_n \ge 0$ — ступенчатая: $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p \to 0$$

, по теореме Лебега. f — любого знака: берем $f^+, f^-, \ldots$

□

Определение. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — **финитная**, если $\exists B(0, r) : f \equiv 0$ вне $B(0, r)$.
$C_0(\mathbb{R}^m)$ — непрерывные финитные функции. $\forall p \ge 1$ $C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Определение. Топологическое пространство X — **нормальное**, если

1. Точки X — замкнутые множества
2. $\forall F_1, F_2 \subset X$ — замкнутые, $\exists U(F_1), U(F_2)$ — открытые и $U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

Задача 2. R^m — нормальное

Лекция 10

Теорема 10.0.1 (Формула Остроградского)**.**

- $V = \{(x,y,z) \big| (x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \le z \le F(x,y)\}$
- G — компактно
- ∂G — кусочно гладкая
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- R: окр.$(V) \to \mathbb{R}$, $\in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} R\, dx\, dy = \iint_{\partial V} 0\, dy\, dz + 0\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Доказательство.

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} = \iint_G dx\, dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint_G R(x,y,F(x,y))\, dx\, dy - \iint_G R(x,y,f(x,y))\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{\Omega_F} R(x,y,z)\, dx\, dy + \iint_{\Omega_f} R\, dx\, dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R\, dx\, dy}_{0}$$

$\square$

Следствие 10.0.1.23 (обобщение формулы Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Определение. V — гладкое векторное поле. **Дивергенция**:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Замечание.

$$\operatorname{div} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}\iiint_{B(a,\varepsilon)}\operatorname{div} V\,dx\,dy\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}\iint_{S(a,\varepsilon)}\langle V,\overline{n}_0\rangle ds$$

— не зависит от координат

Следствие 10.0.1.24.

- $l \in \mathbb{R}^3$
- $f \in C^1(\text{окр}(V))$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V} f\cdot\langle f, n_0\rangle ds$$

10.1 Формула Стокса

Определение.

$$\int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Omega}\langle rot(V), n_0\rangle ds$$

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

— ротор векторного поля (вихрь векторного поля)

Пример.

$$V(x,y,z) = (-y, x, 0)$$

$$\operatorname{rot} V = (0,0,2)$$

Замечание. $V = (P,Q,R)$ — потенциально, $\exists f$

$$V = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Теорема 10.1.1 (Пуанкаре)**.**

- Ω — область

Тогда V — потенциально $\Leftrightarrow \operatorname{rot} V = 0$

Определение. Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ — **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если $\exists$ гладкое векторное поле B в Ω:

$$A = \operatorname{rot} B$$

B — называется **векторным потенциалом** A

Теорема 10.1.2 (Пуанкаре')**.**

- Ω — открытый паралеллепипед
- A — векторное поле в Ω, $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

Доказательство.

($\Rightarrow$) $\operatorname{div}\operatorname{rot} B = 0$

($\Leftarrow$) Дано:

$$A_1{}'_x + A_2{}'_y + A_3{}'_z = 0 \tag{10.1}$$

. Найдем векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, $A = \operatorname{rot} B$. Путь $B_3 \equiv 0$

$$\left.\begin{aligned} B_3{}'_y - B_2{}'_z = A_1 \\ B_1{}'_z - B_3{}'_x = A_2 \\ B_2{}'_x - B_1{}'_y = A_3 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \begin{aligned} -B_2{}'_z = A_1 \quad (1) \\ B_1{}'_z = A_2 \quad (2) \\ B_2{}'_x - B_1{}'_y = A_3 \quad (3) \end{aligned}$$

(1)

$$B_2 \coloneqq -\int_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x, y)$$

(2)

$$B_1 \coloneqq \int_{z_0}^{z} A_2 dz$$

(3)

$$-\int_{z_0}^{z} A_1{}'_x\, dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^{z} A_z{}'_y\, dz = A_3 \xRightarrow[10.1]{} \int_{z_0}^{z} A_3{}'_z dz + \varphi'_x = A_3$$

$$A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x = A_3(x, y, z) \Leftrightarrow \varphi'_x = A_3(x, y, z_0)$$

Отсюда найдем $\varphi = \int_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0)\, dx$

□

Замечание.

$$\int_{\partial\Omega} A_l\, dl = \int_{\partial\Omega} \langle A, l_0\rangle\, dl = \iint_{\Omega} (\operatorname{rot} A)_n\, ds$$

$$(\operatorname{rot} A)_n(a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\lambda(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\Omega_\varepsilon} (\operatorname{rot} A)_n\, ds = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\lambda\Omega} \cdot \int_{\partial\Omega_\varepsilon} A_l\, dl$$

Лемма 8 (Урысона)**.**

- X — *нормальное*
- $F_0, F_1 \subset X$ — *замкнутые,* $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R}$ — *непрерывная,* $0 \le f \le 1$, $f\big|_{F_0} = 0$, $f\big|_{F_1} = 1$

Доказательство. Перефразируем нормальность: Если $\underset{\text{замк.}}{F} \subset \underset{\text{октр.}}{G}$, то $\exists U(F)$ — открытое:

$$F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$$

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^C \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^C}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$\overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}} \subset G_1$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}$, $G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом для любого двоично рационального числа $\alpha \in [0,1]$ найдется множество G_α

$$f(x) \coloneqq \inf\{\alpha \text{ — двоично рациональное} \big| x \in G_\alpha\}$$

Проверим что: f — непрерывно $\Leftrightarrow f^{-1}(a,b)$ — всегда открыто. Достаточно проверить:

1. $\forall b\ f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a\ f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

Покажем это:

1. $$f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q<b \\ q \text{ — дв. рац.}}} G_q \text{ — открыто}$$

   (⊃) Очевидно: При $x \in G_q$ $f(x) \leq q - b$

   (⊂) $f(x) = b_0 < b$ Возьмем $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

2. $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q>a} G_q = \bigcap_{q>a} \overline{G_q}$ — замкнуто

   (⊃) Тривиально

   (⊂) q, r — двоично рациональные

   $$\bigcap_{\substack{q>a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

□

Теорема 10.1.3.

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_{\mathfrak{M}})$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$, $1 \leq p < +\infty$ множество непрерывных финитных функций плотно

Замечание. f — финитная в $\mathbb{R}^m$ = $\exists$ шар B $f = 0$ вне B. f — непрерывная финитная на E = $\exists g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ $f = g\big|_E$

Доказательство. Ступенчатые функции плотны в $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$. Достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\forall A \subset E$ — ограниченного, $\exists f$ — финитная непрерывная: $\|f - \mathcal{X}_A\|_p < \varepsilon$.
Как потсроить для $\forall h \in L^p$ финитную непрерывную f: $\|h - f\|_p < \varepsilon$? $\exists g$ — ступенчатая:

$$g = \sum_{\text{кон.}} a_k \mathcal{X}_{A_k} \quad \|h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

Подберем f_k: $\|f_k - \mathcal{X}_{A_k}\| < \frac{\varepsilon}{\sum |a_i| \cdot 2}$

$$\|h - f\|_p \leq \|h - g\| + \|g - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum |a_k| \|\mathcal{X}_{a_k} - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{\text{замкн.}}{F} \subset A \subset \underset{\text{откр.}}{G} \quad \lambda_{\mathfrak{M}}(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона $\exists f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывная: $f\Big|_F \equiv 1$, $f\Big|_{G^C} \equiv 0$

$$\|f - \mathcal{X}_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \mathcal{X}_A|^p \, d\lambda_{\mathfrak{M}} = \int_{G \setminus F} |f - \mathcal{X}_A|^p \leq 1 \cdot \lambda_{\mathfrak{M}}(G \setminus F) = \varepsilon$$

$\square$

Замечание. В $L^\infty(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$ утверждение теоремы неверно. $L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$ $B\left(\chi_{[a,b]}, \frac{1}{2}\right)$ не содержит непрерывных функций

$$\sup_{\mathbb{R}} |f - \chi_A| \geq \max(\lim_{x \to a+0} |f(x) - \chi_A|, \lim_{x \to a-0} |f(x) - \chi_A|) =$$

$$= \max(|f(a) - 1|, |f(a) - 0|) \geq \frac{1}{2}$$

Замечание. В $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$, $p < +\infty$ плотны:

- Линейные комбинации характеристических функций ячеек
- Гладкие функции
- Рациональные линейные комбинации рациональных ячеек
- Непрерывные функции

Лекция 11

Замечание. Соглашение: $L^p[0,T],\ T \in \mathbb{R}$ — это пространство можно понимать как пространство T-периодических функций

$$\forall x f(x) = f(x+T)$$

- $\tilde{f}$ — представитель $\tilde{f}_1$ — еще один
- $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x+T)$ почти везде

Удобство: $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$

$$C[a,b]\ \|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

$\tilde{C}[0,T]$ — непрерывные T-периодические функции

- $f \in C[0,T],\ f \in \tilde{C}[0,T] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} f$ — равномерно непрерывна
- в $L^p[0,T]$ функции из $\tilde{C}$ образуют плотное множество

Пример. Линейная функция на $L^p(X,\mu)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
берем $g \in L^q(X,\mu)$ и строим отображение $L^p \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto \int_X fg\,d\mu \quad \left|\int_X fg\right| \le \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$|\alpha f_n - \alpha(f)| = \left|\int_X (f_n - f)g\right| \le \|f_n - f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Определение.

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) \coloneqq f(x+h)$ — **Сдвиг**

Теорема 11.0.1 (о непрерывности сдвига)**.**

1. f — равномерно непрерывна.
   <u>Тогда</u> $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$,
   т.е. $\sup_x |f(x+h) - f(x)| \to 0$

2. $f \in L^p(\mathbb{R}^m),\ 1 \le p < +\infty$
   <u>Тогда</u> $\|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

3. $f \in \tilde{C}[0,T]$
   <u>Тогда</u> $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

4. $1 \le p < +\infty,\ f \in L^p[0,T]$
   <u>Тогда</u> $\|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Замечание.

1. Для L^∞ непрерывности сдвига нет

$$f = \mathcal{X}_{[0,1]} \quad f_h = \mathcal{X}_{[-h,1-h]}$$

$$\operatorname{ess\,sup}|f - f_n| = 1$$

2. Во всех упомянутых 2 и 4

$$h \mapsto \|f_h - f\|_p$$

непрерывно в нуле $\implies$ непрерывно всюду

$$\|f_h - f\|_p - \|f_{h_0} - f\|_p \le \|f_h - f_{h_0}\|_p = \|f_{h-h_0} - f\|_p \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$$

Доказательство.

2), 4) $\forall \varepsilon > 0\ \forall f \in L^p[0,T]\ \exists g$ — непрерывная

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда g — равномерно непрерывна

$$\|f_h - f\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \le \frac{\varepsilon}{3} + \|g - g_h\|_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

4)

$$\|g_h - g\|_p = \left(\int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\|g_h - g\|_\infty^p \cdot \int_0^T 1\,dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= T^{\frac{1}{p}} \cdot \|g_h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

2) g — финитная, $\sup g \in B(0,R)$ Пусть $|h| < 1$

$$\|g_h - g\|_p \le \|g_h - g\|_{L^p(B(0,R+1),\lambda_m)} \le \|g_h - g\|_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\square$

11.1 Гильбертово пространство

- X — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$
- Скалярное произведение $X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
  1. $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  2. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \gamma\rangle = \alpha_1 \langle x, y\rangle + \alpha_2 \langle x, y\rangle$
  3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ ($\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$)

  Неравенство Коши-Буняковского: $| \langle x, y\rangle |^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$

$$\|x\| \xlongequal{\text{def}} \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Определение. $\mathcal{H}$ — линейное пространство в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при это $\mathcal{H}$ — полное (как метрическое пространство), то оно называется **Гильбертовым пространством**

Пример.

1. $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$
2. $L^2(X, \mu)$ — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

   Корректное неравенство Коши-Буняковского для интеграла:

$$\left|\int_X f\overline{g}\right| \leq \left(\int_X |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |\overline{g}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

   Это скалярное произведение

$$\langle g, f\rangle = \int_X g\overline{f} = \overline{\left(\int_X fg\right)}$$

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^2\, d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

   — именно текущую норму в L^2 мы и рассматривали с самого начала

   - L^2 — полно
   - L^2 — гильбертово
3. Антипример $L^p, p \neq 2$ — не Гильбертово
4. $l^2 = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty},\ x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \big| \sum |x_j|^2 < +\infty\}$

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_j x_j\overline{y_j} = \int_{\mathbb{R}} x(j)\overline{y(j)}\, d\mu(j)$$

   μ — дискретная мера на $\mathbb{N}$, $\forall i \mu\{i\} = 1$ $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0$

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_j|^2}$$

Определение. Сходящийся ряд: $\sum a_n,\ a_n \in \mathcal{H}$

$$S_N = \sum_{1 \le n \le N} a_n$$

Если $\exists S \in \mathcal{H}\ S_N \to S$ в $\mathcal{H}$

Определение. $x, y \in \mathcal{H}$ x **ортогонально** y $(x \perp y)$ если $\langle x, y \rangle = 0$

Определение. $A \subset \mathcal{H}$ $x \perp A : \forall a \in A\ \ \langle x, a \rangle = 0$

Определение. Ряд $\sum a_k$ — **ортогональный**, если $\forall k, l\ a_k \perp a_l$

Пример. $a_k \in l^2 : (0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots)$, тогда $\sum a_k$ — ортогональный

$$\sum a_k = S = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in l^2$$

Свойство 1. *$x_n \to x$, $y_n \to y$ в $\mathcal{H}$*
Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

Доказательство.

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \le |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \le$$

$$\le \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$$

□

Свойство 2. *$\sum x_k$ — сходится*
Тогда $\forall y \in \mathcal{H}\ \langle \sum x_k, y \rangle = \sum \langle x_k, y \rangle$

Доказательство.

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k \xrightarrow[N \to +\infty]{} S$$

$$\langle S_N, y \rangle \to \langle S, y \rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle$$

$$\langle S_N, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y \rangle$$

— это частичные сумма ряда из правой части □

Свойство 3. *$\sum x_k$ — ортогональный ряд*
Тогда $\sum x_k$ *— сходится* $\Leftrightarrow \sum \|x_k\|^2$ *— сходится*

Доказательство. $S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k$

$$\|S_N\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{N} x_k, \sum_{j=1}^{N} x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle x_k, x_k \rangle = \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2$$

$\Rightarrow$ S_N — фундаментальная $\implies$ S_N — фундаментальная в $\mathcal{H}$

$\Leftarrow$ S_N — сходится в $\mathcal{H}$

$\square$

Определение. $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ — **ортогональное семейство**. Если:

1. $\forall k, l\ e_k \perp e_l$
2. $\forall k\ e_k \neq 0$

Если потребовать

3. $\|e_k\| = 1$

, то будет **ортонормированное семейство**

Замечание. $\{e_k\}$ — О.С. $\implies \left\{\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\}$ — О.Н.С

Пример. $l^2,\ e_k \coloneqq (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ — О.Н.С.

Пример. $L^2[0, 2\pi]$ $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$ — О.Н.С.

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos lt = \frac{1}{2}\int_0^{s\pi} \cos(kt - lt) + \cos(kt + lt)\, dt = \left[\begin{array}{ll} 0 & k \neq l \\ \pi & k = l \end{array}\right.$$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$ — О.Н.С

Пример. $L^2[0, 2\pi]$ над $\mathbb{C}$

$$\left\{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ — О.Н.С}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}\, dt \underset{k \neq l}{=\!=} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(k-l)i} e^{i(k-l)t}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

Пример. $L^2[0, \pi]$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2t, \dots\right\} \text{ — О.Н.С.}$$

Теорема 11.1.1.

- $\{e_k\}$ — О.С. в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Тогда

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З
2. $c_k \coloneqq \frac{\langle x, e_k\rangle}{\|e_k\|^2}$
3. $c_k e_k$ — это проекция x на прямую $\{te_k,\ t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$
   $x = c_k e_k + z,\ z \perp e_k$

Доказательство.

1. $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k = 0$
   $\alpha_n \|e_n\|^2 = 0 \implies \alpha_n = 0$

2. $$\langle x, e_k \rangle = \sum \langle c_j e_j, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2$$

3. $$\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k e_k, e_k \rangle = 0$$

□

Определение. $\{e_k\}$ — О.С. $x \in \mathcal{H}$

$$c_k(x) \coloneqq \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

— называются **коэффициентами Фурье элемента** x **по системе** $\{e_k\}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \cdot e_k$$

— ряд Фурье вектора x **по системе** e_k

Замечание. При замене ОС на ОНС $\left\{\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\} = \tilde{e}_k$ ряд Фурье не изменится

$$\frac{\langle x, \tilde{e}_k \rangle}{\|\tilde{e}_k\|^2} = \left\langle x, \frac{e_k}{\|e_k\|} \right\rangle = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|}$$

$$\tilde{c}_k \cdot \tilde{e}_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|} \cdot \frac{e_k}{\|e_k\|} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} \cdot e_k = c_k(x) \cdot e_k$$

Теорема 11.1.2 (о свойствах частичных сумм ряда Фурье)**.**

- $\{e_k\}$ — ОС в H
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} c_k(x) e_k \in \mathcal{L}_n = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_n)$$

Тогда

Свойство 1. S_n *— проекция* x *на* $\mathcal{L}_n$*, т.е.* $x = S_n + z \implies z \perp \mathcal{L}_n$

Доказательство. $k = 1, \dots, n$

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) \|e_k\|^2 = 0$$

□

Свойство 2. S_n *— элемент наилучшего приближения для* x *в* $\mathcal{L}_n$

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$$

Доказательство. $x = S_n + z$

$$\|x - y\|^2 = \| \underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n} \| = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

□

Свойство 3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Доказательство.

$$\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$$

□

Лекция 12

$\mathcal{H}$ — гильбертово
$\{e_k\}$ — ортогональная система, $x \in \mathcal{H}$

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k \right\| \leq \|x\|$$

Следствие 12.0.0.25 (Неравенство Бесселя).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

Теорема 12.0.1 (Рисс, Фишер)**.**

- $\{e_k\}$ — ОС в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

Тогда

1. ряд Фурье вектора x сходится в $\mathcal{H}$
2. $$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z \quad z \perp e_k, \ \forall k$$
3. $$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \Leftrightarrow \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Доказательство.

1. Ряд Фурье — ортогональный ряд. Сходимость ряда Фурье $\Leftrightarrow$ сходимость

$$\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$$

Это выполняется по неравенству Бесселя

2. $z = x - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$

$$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum c_k(x) \langle e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \|e_n\|^2 = 0$$

3. $(\Rightarrow)$ Теорема 1.3?

   $(\Leftarrow)$ из п.2 $\|x\|^2 = \|\sum c_k(x) e_k\| + \|z\|^2 \implies \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$
   Дано:

$$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\| \implies z = 0 \implies x = \sum c_k(x) e_k$$

□

Замечание. $\mathcal{L} = \mathrm{Cl}(\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots))$, где Cl — замыкание
$\sum c_k(x) e_k$ — проекция x на $\mathcal{L}$

Замечание. $\mathcal{H}$, e_k — ОНС, тогда последовательность $(c_k(x))_{x \in \mathbb{N}} \in l_2$
Обратное тоже верно: $\forall c(x) \in l_2 \ \exists x \in \mathcal{H} \ c_k = c_k(x)$ $[x \coloneqq \sum c_k e_k$ — сходится$]$

Замечание. Если ортогональный ряд сходится, то он есть ряд Фурье своей суммы

Определение. $\{e_k\}$ — ОС — **базис** $\mathcal{H}$, если $\forall x \in \mathcal{H}$ $x = \sum c_k(x) e_k$

Определение. ОС – **полная**, если $\nexists z \neq 0 :$ $z \perp$ всем e_k

Определение. ОС — **замкнутая**, если $\forall x$ $\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

Теорема 12.0.2 (о характеристике базиса)**.** $\{e_k\}$ — ОС в $\mathcal{H}$. Тогда эквивалентны

1. $\{e_k\}$ — базис
2. $\forall x, y$ — выполняется обобщенное уравнение замкнутости

$$\langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$

3. $\{e_k\}$ — замкнута
4. $\{e_k\}$ — полная
5. $\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots)$ — плотна в $\mathcal{H}$, т.е. $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots) = \mathcal{H}$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \quad 4 \Leftrightarrow 5$

$(1 \Rightarrow 2)$ Берем $x = \sum c_k(x) e_k$ и скалярное умножаем на y:

$$\langle e_k, y \rangle = \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y) \cdot \|e_k\|^2} = \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \dots$$

$(2 \Rightarrow 3)$ $y \coloneqq x$ в обобщенное уравнение

$(3 \Rightarrow 4)$ $\exists z : \forall n\ \langle z, e_n\rangle = 0$?, т.е. $c_n(z) = 0$
Для этого z уравнение замыкания $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \|e_k\|^2 = 0$

$(4 \Rightarrow 1)$ по теореме Рисса-Фишера $x = \sum c_k(x) e_k + z$, где $\forall k :\ z \perp e_k$. В силу полноты ОС $z = 0$

$(4 \Rightarrow 5)$ $\mathcal{L} \coloneqq \operatorname{Cl}\operatorname{Lin}\{e_k\}$. Надо проверить $\mathcal{L} = \mathcal{H}$.
Если $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, то по теореме Рисса-Фишера как в предыдущем пункте $z = 0$, т.е. $x \in \mathcal{L}$

$(5 \Rightarrow 4)$ Если $z \perp$ всем $e_k \implies z \perp \operatorname{Lin}\{e_k\} z \perp \mathcal{L}$, но $\mathcal{L} = \mathcal{H} \implies z \perp z$, т.е. $\langle z, z\rangle = 0$

□

12.1 Тригонометрические ряды Фурье

Определение. $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический полином** степени не выше n

Определение.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— **тригонометрический ряд**, a_k, b_k — **коэффициенты тригонометрического ряда**

Определение.

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

— **комплексный тригонометрический полином** или **тригонометрический полином в комплексной записи**

Определение.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

— **тригонометрический ряд в комплексной записи**

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

Лемма 9. *Дан тригонометрический ряд(вещественный или комплексный). Пусть $S_n \to f$ в $L^1[-\pi,\pi]$ ($\|S_n - f\|_1 = \int_{[-\pi,\pi]} |S_n - f| \to 0$)*
Тогда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt$$

или

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$$

Доказательство. Докажем для a_k. Пусть $n \geq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\cos kt\,dt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kt\,dt = \pi a_k$$

При $k = 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cdot 1 = \pi a_0$

$$\left|\pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}(S_n(t)-f(t))\cos kt\,dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|S_n(t)-f(t)|\,dt = \|S_n - f\|_1 \to 0$$

□

Определение. $f \in L^1[-\pi,\pi]$. $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$ — заданные в лемме называются **коэффициентами Фурье функции** f а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$$

или

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

называются **рядом Фурье функции** f

Замечание. $f \in L^1[-\pi,\pi]$

- f — четная $\implies$ $\forall k\ b_k(f) = 0,\ a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$
- f — нечетная $\implies$ $a_k(f) = 0,\ b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$

Замечание. $f \in L^1[0,\pi]$ — для таких функций рассматривается два ряда Фурье — для четного и нечетного продолжения f

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k(f)\cos kx$$

, где a_k – из 1 пункта замечания

$$f \sim \sum b_k(f)\sin kx$$

, где b_k – из 2 пункта замечания

Лемма 10.

$$A_k(f,x) := \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2}a_0(f) & k = 0 \\ a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx & k = 1,2,\ldots \end{array}\right.$$

Тогда

$$A_k(f,x) = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,dt \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos kt\,dt \end{array}\right.$$

Доказательство.

(A)

$$A_k(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos kx + f(t)\sin kt\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(t-x))\,dt = \Big|\ t = x+\tau\ \ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\cos k\tau\,d\tau$$

(B) Если $f \in L^1[-\pi,\pi]$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \le \frac{1}{\pi}\|f\|_1$

$$|A_k(t)| \le \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{\pi}\|f\|_1 & k=0 \\ \frac{1}{2\pi}\|f\|_1 & k=1,2,\dots \end{array}\right.$$

□

Пример. Контрпримеры

1. До Буа Реймонд $\exists f \in \tilde{c}$ — ряд Фурье расходится в некоторой точке
2. Лебег $\exists f \in \tilde{c}$ — ряд Фурье сходится неравномерно
3. Колмагоров $\exists f \in L^1$ — ряд Фурье расходится в каждой точке
4. Карлесон $f \in L^2$ — ряд Фурье сходится почти везде
5. Хант $f \in L^p,\ 1 < p < +\infty$ – ряд Фурье сходится почти везде

Теорема 12.1.1 (Римана-Лебега)**.**

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\int_E f(t)e^{i\lambda t}\,dt \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

$$\int_E f(t)\cos\lambda t \to 0$$

$$\int_E f(t)\sin\lambda t \to 0$$

В частности $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Доказательство. н.у.о $E = \mathbb{R}$ [пусть $f = 0$ на E]

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \Big|\ t = \tau + \tfrac{\pi}{\lambda}\ \ = -\int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{\lambda})e^{i\lambda\tau}\,d\tau$$

Значит

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right)e^{i\lambda t}\,dt$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\cdot|e^{i\lambda t}|\,dt \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

По Лемме о непрерывности сдвига □

Следствие 12.1.1.26. Пусть

$$\omega(f,h)=\sup_{\substack{x,y\in E\\ |x-y|\le h}}|f(x)-f(y)|$$

— модуль непрерывности Если $f\in\tilde{C}[-\pi,\pi]$, то $|a_k(f)|,|b_k(f)|,|2c_k(f)|\le\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)$

Доказательство.

$$|2c_{-k}(f)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{ikt}\,dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{k}\right)\right|\,dt\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)\,dt=\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)$$

□

Следствие 12.1.1.27.

- $E\subset\mathbb{R}$, $E=\langle a,b\rangle$

Класс Липшица: $M>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,1]$

$$\operatorname*{Lip}_M\alpha(E)=\{f:E\to\mathbb{R}:\forall x,y\ |f(x)-f(y)|\le M|x-y|^\alpha\}$$

Пусть $f\in\mathrm{Lip}_M\alpha$, тогда при $k\ne0$

$$|a_k(f)|,|b_k(f)|,|2c_k(f)|\le\frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$$

Доказательство. $f\in\mathrm{Lip}_M\,\alpha\implies\omega(f,h)\le Mh^\alpha$. □

Замечание. f — дифференцируема, $f'\le M$, тогда $f\in\mathrm{Lip}_M\,1$

Следствие 12.1.1.28.

1. $f\in\tilde{C}^{(r)}[-\pi,\pi]$
   <u>Тогда</u> $|a_k(f)|,|b_k(f)|,|c_k(f)|\le\frac{const}{|k|^r}$
2. $f\in\tilde{C}^{(r)}$, $f^{(r)}\in\mathrm{Lip}_M\,\alpha$, $0<\alpha\le1$
   <u>Тогда</u> $|a_k(f)|,|b_k(f)|,|2c_k(f)|\le\frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$

Доказательство. Проведем эксперимент, после которого доказательство станет очевидным $f\in\tilde{C}[-\pi,\pi]$, тогда при $k\ne0$

$$a_k(f')=kb_k(f)$$
$$b_k(f')=-ka_k(f)$$
$$c_k(f')=ikc_k(f)$$

— интегрирование по частям

$$c_k(f')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)e^{-ikt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\left(f(t)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot ik\cdot e^{ikt}\,dt\right)$$

□

Лекция 13

13.1 Суммируемость ряда Фурье

Определение.

1. $$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right)$$

   — **ядро Дирихле** (ядро в смысле kernel)
   Ядро $K(x, y)$
   $$f \mapsto \int_E f(t)K(x, y)\, dt$$
   — линейный оператор

2. $$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

   — **ядро Фейера**

Лемма 11.

1. $$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2\pi \cdot \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt\right)$$

2. $$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

3. D_n, Φ_n *— четные,* $\Phi_n \geq 0$
   $$\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$$

4. $g \in L^1[-\pi, \pi]$
   $$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) D_n(t)\, dt$$

Доказательство.

1.
$$2\sin\frac{t}{2}\cos kt = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t$$

Получается телескопическая сумма

2. Достаточно проверить
$$\sum \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$
$$\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \frac{1}{2}\sum\cos kt - \cos(k+1)t =$$
$$\frac{1-\cos(n+1)t}{2} = \sin^2\frac{n+1}{2}t$$

3. Очевидно

4.
$$A_k(f,x) = \left[\begin{array}{lr} \frac{a_0}{2} & k=0 \\ a_k\cos kx + l_k\sin kx & \end{array}\right.$$
$$A_k(f,x) = \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,dt \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos xt\,dt \end{array}$$
$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt$$

$\square$

Теорема 13.1.1 (принцип локализации Римана)**.**

- $f, g \in L^1[-\pi,\pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad f(x) = g(x)$

Тогда Ряды Фурье f и g ведут себя одинаково в точке x_0:
$$S_n(f,x_0) - S_n(g,x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Замечание. Переформулировка:

- $h \coloneqq f - g \in L^1[-\pi,\pi]$
- $h \equiv 0$ на $x_0-\delta, x_0+\delta$

Тогда $S_n(h,x_0) \to 0$

Доказательство.

$$S_n(h,x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x_0+t)(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt+\cos nt)\,dt=b_n(h_1)+a_n(h_2)$$

, где

$$h_1(t)=\frac{1}{2}h(x_0+t)\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\quad h_2(t)=\frac{1}{2}h(x_0+t)$$

Это рассуждение верно если $h_1,h_2\in L^1[-\pi,\pi]$

- Для h_2 — очевидно
- Для h_1: $h_1\equiv 0$ при $t\in(-\delta,\delta)$

  $$|h_1(t)|\le|h(x_0+t)|\cdot\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\in L^1$$

  Тогда $b_n(h_1)\to 0,\ a_n(h_2)\to 0$ по теореме Римана-Лебега

□

Замечание.

1. Если $[a,b]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$
   $S_n(h,x)\rightrightarrows 0$ на $[a,b]$
2. Для определения ряда Фурье нужен весь $[-\pi,\pi]$, а его измерение в точке x_0 зависит от его окрестности
3. $f\in L^1[0,\pi]$ — можно разложить по sin или по cos. Тогда в точках $(0,\pi)$ эти разложения ведут себя одинаково

Теорема 13.1.2 (признак Дини)**.**

- $f\in L^1[-\pi,\pi]$
- $x_0\in\mathbb{R}$
- $S\in\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

Пусть

$$\int_0^{\pi}\frac{|f(x_0+t)-2S+f(x_0-t)|}{t}\,dt<+\infty \tag{13.1}$$

Тогда ряд Фурье f сходится к S в точке x_0, т.е. $S_n(f,x_0)\to S$

Доказательство.

$$\varphi(t):=f(x_0+t)-2S+f(x_0-t)\quad \varphi(t)\in L^1$$

$$S_n(f,x_0)-S=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+t)-S)D_n(t)\,dt=\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}\dots=$$

$$=\int_0^{\pi}\varphi(t)D_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\varphi(t)\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt+\cos nt\right)=b_n(h_1)+a_n(h_2)$$

, где

$$h_1=\begin{bmatrix}0 & t\in[-\pi,0]\\ \frac{1}{2}\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2} & t\in[0,\pi]\end{bmatrix}\quad h_2=\begin{bmatrix}0 & t\in[-\pi,0]\\ \frac{1}{2}\varphi(t) & t\in[0,\pi]\end{bmatrix}$$

Доказываемое утверждение следует из теоремы Римана-Лебега, если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$
$h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$? — да, по формуле 13.1

$$\operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t} \quad \frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_1| = \int_0^{\pi} |h_1| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} < \int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$$

— по 13.1 □

Замечание.

1. 13.1 $\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$
2. $f(x) = \frac{1}{\ln |x|} \quad x \in [-\pi, \pi]$
   $\forall S$ интеграл 13.1 расходится $(x_0 = 0)$

$$s = 0 : \int_0^{\pi} \frac{1}{t |\ln(t)|} = +\infty$$

Следствие 13.1.2.29.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$

Пусть существует четыре конечных предела: $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$

$$\alpha_{\pm} \coloneqq \lim_{t \to \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$$

Тогда ряд Фурье f в точке x_0 сходится к $S = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Доказательство.

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \xrightarrow[t \to +0]{} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е. $\frac{\varphi(t)}{t}$ — ограничена вблизи 0 на $[0, \pi] \implies$ по замечанию 1, интеграл 13.1 □

Следствие 13.1.2.30.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- f — непрерывна в точке x_0
- $\exists$ конечный односторонние производные в точке x_0 (либо f дифференцируема в x_0)

Тогда $S_n(f, x_0) \to f(x_0)$

Доказательство. Следует из 13.1.2.29 □

Пример.

- $f(x) = x \quad [-\pi, \pi]$

- $a_k(f) = 0$
- $b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\sin kt =$

$$= \frac{2}{\pi}t \cdot (-\cos kt) \cdot \frac{1}{k}\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos kt = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}$$

При $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\sum (-1)^{k-1} \cdot \frac{2}{k}\sin kx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

При $x_0 = \pi$ работает 13.1.2.29

$$\sum \dots \sin \pi x = 0$$

13.2 Свертки и аппроксимативная единица

Определение. $f, k \in L^1[-\pi, \pi]$

$$(f * k)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\,dt$$

— **свертка** функций f и k

Свойство 1. *Корректность определения*

$$g(x,t) = f(x-t) \cdot k(t)$$

1. *Проверим, что $\varphi(x,y) := f(x-t)$ — измерима как функция $\mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, тогда и $g : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима. Обозначим $a \in \mathbb{R}$ $E_a := \mathbb{R}(f(x) < a)$*

$$V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$$

   — измеримо в $\mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}^2(\varphi < a)$ — тоже измеримо в $\mathbb{R}^2$

2. *$g \in L^1([-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi])$?*

$$\iint_{[-\pi,\pi]^2} |g(x,t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt|k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1$$

   Тогда по теореме Фубини для интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\,dt$$

   — при почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ этот интеграл существует(и конечен?) и задает по x функцию из $L^1(-\pi,\pi]$, т.е. $f * k$ определен при почти всех x, $\in L^1[-\pi,\pi]$

Свойство 2. $f * k = k * f$

Доказательство. $t := -t$ □

Свойство 3. $c_n(f * k) = 2\pi \cdot c_n(f) \cdot c_n(k)$

Доказательство.

$$2\pi c_n(f*k) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\cdot e^{-inx}\,dt\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} k(t)e^{-int}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}\,dx\,dt = 2\pi c_n(f)\cdot 2\pi c_n(k)$$

□

Свойство 4.

- $f \in L^p[-\pi,\pi]$
- $k \in L^q[-\pi,\pi]$
- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad 1 \le p \le +\infty$

Тогда $f*k$ *— непрерывная функция и* $\|f*k\|_\infty \le \|k\|_q \cdot \|f\|_p$

Доказательство. Неравенство очевидно — это неравенство Гельдера

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\,dt\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\cdot|k(t)|\,dt \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}|k(t)|^1\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p\cdot\|k\|_q$$

Непрерывность:

$$|f*k(x+h)-f*k(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+h-t)-f(x-t)\right)k(t)\,dt\right| \le \|k\|_q\cdot\|f_h(x)-f(x)\|_p$$

□

Свойство 5.

- $f \in L^p[-\pi,\pi] \quad 1 \le p \le +\infty$
- $k \in L^1[-\pi,\pi]$

Тогда $f*k \in L^p[-\pi,\pi]$

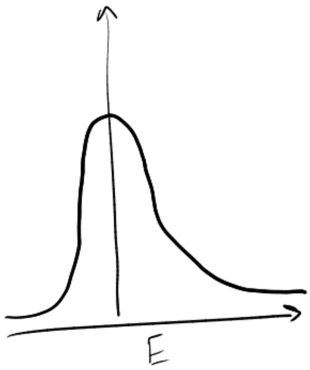
$$\|f*k\|_p \le \|k\|_1\cdot\|f\|_p$$

Лекция 14

$f, g \in L^1[-\pi, \pi]$

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt$$

Пример. g :



f — непрерывна
$(f * g) \approx f$

$$g = \left[\begin{array}{ll} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{array}\right. \quad \int_{-\pi}^{\pi} g = 1$$

$\delta_0 :\ \mu\{0\} = 1 \quad \mu(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$

$$\mu E = \int_E g\,dx$$

Обозначение. $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta] = E_\delta$

Определение. Аппроксимативная единица

- $D \subset \mathbb{R}$
- h_0 — предельная точка в $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$ — называется аппроксимативной единицей

AE1 $\forall h \in D$, $K_h \in L^1[-\pi, \pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

AE2 L_1 — нормы функций K_h ограничены в совокупности

$$\exists M\ \forall h\ \int_{[-\pi,\pi]} |K_h| \le M$$

AE3 $\forall \delta \in (0,\pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h|\,dx \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$$

Замечание. $K_h \ge 0\ \forall h$
Тогда AE1 $\Leftrightarrow$ AE2

Замечание.

AE3' $K_h \in L^\infty[-\pi,\pi]$ и $\forall \delta \in (0;\pi)$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$$

Лемма 12. *AE3'* $\Leftrightarrow$ *AE3*

Определение. AE1 + AE2 + AE3' = **усиленная аппроксимативная единица**

Теорема 14.0.1. K_h — а.е.

1. $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi] \implies f * K_h \xrightarrow[h\to h_0]{[-\pi,\pi]} f$
2. $f \in L^1[-\pi,\pi] \implies \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$
3. K_h — усиленная а.е. $f \in L^1[-\pi,\pi]$, f — непрерывная в x
   Тогда
   - $f * K_h$ — непрерывна в x
   - $f * K_h(x) \xrightarrow[h\to h_0]{} f(x)$

Доказательство.

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h\,dt$$

M — из AE2

1. $\varepsilon > 0$, f — равномерно непрерывна

$$\exists \delta > 0\ \forall t, |t| < \delta\ \forall x |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$|f * K_h(x) - f(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)||K_h(t)|\,dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon$$

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \le \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \le 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[h\to h_0]{} 0 \xRightarrow[\text{AE3}]{} \exists V(h_0)\ \forall h \in V(h_0)\ I_2 \le \frac{\varepsilon}{2}$$

3. $f \in L^1$, $K_h \in L^\infty \implies f * K_h$ — непрерывна
   Для данного x проверим утверждение $\varepsilon > 0$; $I_1 + I_2 < \varepsilon$; $\exists V(h_0)\ \forall h \in V(h_0)$
   f — непрерывна в x

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t,\ |t| < \delta \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\le \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)|\, dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)|\, dt \\ &\le \operatorname*{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi |f(x)|) \xrightarrow[h \to h_0]{} 0 \end{aligned}$$

, т.е. $\exists V(h_0)\ \forall h \in V(h_0)\ I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$

2.
$$\begin{aligned} \|f * K_h - f\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h\, dt \right| dx \le \\ &\le \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)|\, dx\, dt = \\ &= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1}\, dt \end{aligned}$$

, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|$ — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$= \|K_h\|_1 \left(g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|} \right)(0)$$

— по п.1 $g(0) = 0$

$\square$

Замечание. Модификация п. 2

$$f \in L^p[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_p \xrightarrow[h \to h_0]{} 0$$

Замечание. Модификация п. 3

$$f \in L^1 \quad \exists f(x-0), f(x+0)$$

K_h — усиленная а.е. $\forall h\ K_h$ — четная
<u>Тогда</u>

$$(f * K_h)(x) \to \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x_0+0))$$

14.1 Суммирование рядов Фурье

14.1.1 Метод средних арифметических

Определение.

$$\sum a_n \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

$$\sum a_n \xlongequal[\text{сред. арифм.}]{} S$$

, если $\sigma_n \to S$

Теорема 14.1.1.

$$\sum a_n = S \implies \sum a_n \xlongequal[\text{с.а.}]{} S$$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N,\ |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S_k - S) \right| \le \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |S_k - S|}{n+1}$$

$\exists N\ \forall n > N$ эта дробь $< \frac{\varepsilon}{2}$ □

Определение. $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} S_k(f)$$

— суммы Фейера

Замечание.

$$S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt$$

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t)\, dt$$

, где $\Phi_n = \dfrac{1}{n+1}(D_0 + \dots + D_n) = \dfrac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} t\right)}{\sin^2 \frac{t}{2}}$ — **ядро Фейера**

Теорема 14.1.2 (Фейера)**.**

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$
   Тогда $\sigma_n(f) \xrightarrow[]{[-\pi,\pi]} f$
2. $f \in L^p[-\pi, \pi] \implies \|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$

3. $f \in L^1$, f — непрерывна в $x \implies \sigma_n(f,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

Доказательство. Проверим: Φ_n — усиленная а.е. и тогда 1-3 следуют из свойства а.е.

AE1 $\Phi_n \in L^1$, т.к. Φ_n — непрерывная (и даже $\Phi_n \in L^\infty$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$$

AE2 следует из AE1, поскольку $\Phi_n \geq 0$

AE3 $t \in E_\delta$

$$0 \leq \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□

Замечание. в п.2 $p = 1$ — свойство а.е. было доказано, $p > 1$ — без доказательства

Следствие 14.1.2.31. $f \in L^1[-\pi,\pi]$ — непрерывна в x. Если ряд Фурье f сходится в точке x

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n(f,x) \text{ — конечный}$$

, то $S_n(f,x) \to f(x)$

Доказательство.

$$\sigma_n(f,x) \to f(x)$$

и по теореме Коши □

Следствие 14.1.2.32.

1. Тригонометрическая система полна в $L^2[-\pi,\pi]$
2. $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $\forall k$ $a_k(f) = 0,\ b_k(f) = 0$ либо $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\mathrm{C_k(f) = 0}$
   Тогда $f = 0$ почти везде

Доказательство.

1. Следствие из 2.: $\forall k$ $f \perp \cos kx$ и $f \perp \sin kx$

   $$0 = \langle f, \cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx = \pi a_k(f)$$

   , т.е. $a_k = 0$
2. $S_n(f) = 0$ почти везде, $\sigma_n(f) = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде

□

Следствие 14.1.2.33. $f \in L^2[-\pi,\pi]$
Тогда ряд Фурье f сходится к f в L^2:

$$S_n(f) \to f \text{ в } L^2 \quad \|S_n(f) - f\|_2 \to 0$$

— общее свойство базиса

Следствие 14.1.2.34. $f \in L^1[0, \pi]$. Коэффициенты f по системе $\{\cos kx\}$ равно 0
Тогда $f = 0$ почти везде
Аналогично для $\{\sin kx\}$

Следствие 14.1.2.35 (теорема Вейерштрасса). Тригонометрический полином плотный в $L^p[-\pi, \pi]$ и $\tilde{C}[-\pi, \pi]$, $1 \le p < +\infty$

Следствие 14.1.2.36. $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ Тогда выполняются равенства Парсеваля:

1. $$\int\limits_{[pi,\pi]} f\overline{g} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(h)}$$

2. $$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi \sum |c_k(f)|^2$$

3. $$\int_{-\pi}^{\pi} fg = \pi \left(\frac{a_0(f)a_0(h)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g) \right)$$

4. $$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi \left(\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right)$$

Лемма 13. $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$ — *ядро Дирихле*
Тогда $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$\left| \int_0^x D_n(t) \right| < 2$$

Замечание. D_n — не является а.е. — не выполняется АЕ2

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n \asymp \ln n$$

Теорема 14.1.3. $f \in L^1[-\pi, \pi]$
Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}\,dx$$

Замечание. ряд Фурье при этом может расходится в том числе всюду

Доказательство. Достаточно доказать: $-\pi \le a < b \le \pi$, $\chi = \chi_{[a,b]}$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}\,dx = \sum \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \cdot 2\pi c_{-k}(\chi) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot S_n(\chi, t)\,dt \to \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \chi = \int_a^b f$$

$$S_n(\chi, t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \chi(t)$$

при $t \in [-\pi, \pi],\ t \neq a, b$ по признаку Дини

$$S_n(\chi, t) = \int \chi \cdot D_n = \int_a^b D_n(x-t) = \int_0^{b-t} D_n(x)\,dx - \int_0^{a-t} D_n(x)$$

по лемме $|S_n(x,t)| \leq 4$. Таким образом

$$f \cdot S_n \to f \cdot \chi \text{ — почти везде}$$

$$|f \cdot S_n| \leq \underbrace{4 \cdot |f|}_{\text{сумм.}}$$

Работает условие теоремы Лебега. □

Теорема 14.1.4 (о 'слабой' сходимости рядов Фурье)**.** $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $\forall u \in \tilde{C}^1[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x) \cdot u(x)\,dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)u(x)\,dx$$

Доказательство.

1. $f \in L^1$ u — непрерывна $\implies u \in L^\infty \implies f * u$ — непрерывная и даже гладкая

$$\frac{d}{dx}(f*u)(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(x-t)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u'_x(x-t)\,dt$$

— обобщенный предел Лейбница

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x)u(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)\,dx \xlongequal[\underline{u}(x):=u(-x)]{}$$

$$= \sum c_k(f)c_k(\underline{u}) \cdot 2\pi = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f*\underline{u}) =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f*\underline{u})e^{ikx}\big|_{x=0} \to f*\underline{u}\big|_{x=0} =$$

— по признаку Дини

$$= f*\underline{u}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)u(-t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(t)\,dt$$

□