

# Лекция 9

Пуа Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

## Содержание

### 1 Формула Грина

1

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\int_a^b f ds = \int_a^b \langle F, \gamma' \rangle dt = \int_a^b \langle F, \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \rangle ds$$

Мера на кривой — гладкое 1-мерное многообразие,  $\gamma$  — параметризация. Эта мера — образ меры Лебега в  $\mathbb{R}^1$  с весом  $|\gamma'|$  — интеграл I рода. Общий случай: Интеграл II рода по  $(m - 1)$ -мерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$ .  $F$  — векторное поле

$$\int \langle F, n_0 \rangle dS_{m-1} \quad |\Phi'_u \times \Phi'_v| \text{ — вес}$$

Мера Лебега на  $k$ -мерном многообразии в  $\mathbb{R}^m$ .  $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $\Phi'_1, \dots, \Phi'_k$ , тогда  $\lambda_k(\text{Параллелепипед}(\Phi'_1, \dots, \Phi'_k))$  — вес

## 1 Формула Грина

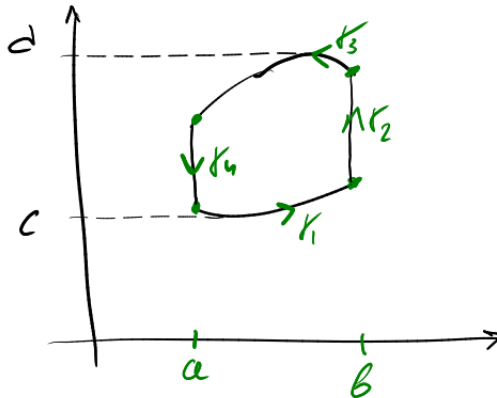
**Теорема 1.1.**

- $D \subset \mathbb{R}^2$  — компактное, связное, односвязное, ограниченное
- $D$  — ограничено кусочно гладкой кривой  $\partial D$
- Пусть граница области  $D$   $\partial D$  ориентированна, согласована с ориентацией  $D$  (против часовой стрелки) — обозначим  $\partial D^+$
- $(P, Q)$  — гладкое векторное поле в окрестности  $D$

Тогда

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + Q dy$$

*Доказательство.* Ограничимся случаем  $D$  — ‘криволинейный 4-х угольник’



$\partial D$  — состоит из путей  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ , где  $\gamma_2, \gamma_4$  — вертикальные отрезки (возможно вырожденные),  $\gamma_1, \gamma_3$  — гладкие кривые (можно считать, что это графики функций  $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$ ). Аналогично можно описать границу по отношению к оси  $Oy$ . Проверим, что:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + Q dy$$

Левая часть:

$$-\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x)) dx$$

Правая часть:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_0 + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_0 = \\ & = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_3(x)) dx \end{aligned}$$

□

*Замечание.* Теорема верна для любой области  $D$  с кусочно гладкой границей, которую можно разрезать на криволинейные 4-х угольники



$$\int_{\partial D^+} = \int_{\partial D_1^+} + \int_{\partial D_2^+}$$

**Теорема 1.2** (Формула Стокса).

- $\Omega$  — простое гладкое двумерное многообразие в  $\mathbb{R}^3$  (двустороннее)
- $n_0$  — сторона  $\Omega$
- $\partial\Omega$  — кусочно гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$  — ориентированная кривая с согласованной ориентацией.
- $(P, Q, R)$  — гладкое векторное поле в окрестности  $\Omega$

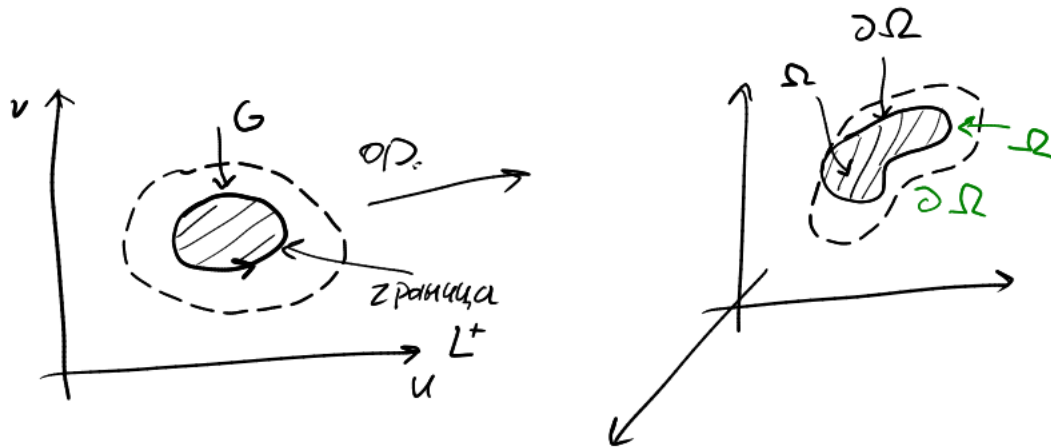
Тогда

$$\int_{\partial\Omega^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

*Доказательство.* Ограничимся случаем  $\Omega \in C^2$ . Достаточно?:

$$\int_{\partial\Omega^+} P dx = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

$$\Phi = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



$$dx dy = -dy dx, dx dx = 0$$

$$dP dx + dQ dy + dR dz = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz) dx + \dots$$

$$\int_{\partial\Omega^+} P dx = \int_{L^+} P \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \quad (1)$$

Параметризуем:  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma = (u(t), v(t))$  — параметризуем  $L^+$

$$\int_{\partial\Omega^+} P dx = \int_a^b P \left( \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) dt \quad (2)$$

$\Phi \circ \gamma$  — параметризуем  $\partial\Omega^+$ ,  $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$2 = \int_a^b P \cdot \frac{\partial x}{\partial u} du + P \cdot \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$1 = \iint_G \frac{\partial}{\partial u} \left( P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv =$$

$$= \iint_G (P'_x \cdot x'_u + P'_y \cdot y'_u + P'_z \cdot z'_u) x'_v + P \cdot x''_{uv} - (P'_x \cdot x'_v + P'_y \cdot y'_v + P'_z \cdot z'_v) x'_u - P \cdot x''_{vu} du dv =$$

$$= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} (z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y} (x'_u y'_v - x'_v y'_u) = \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy$$

□

- $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$

$$\left( \int_X |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ — сходится}$$

- $p = \infty$  :  $\text{ess sup } |f| < +\infty$

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

### Теорема 1.3.

- $\mu E < +\infty$ ,  $1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда

1.  $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2.  $\|f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

Доказательство.

1. Следует из 2)

2.  $r = \infty$ 

$$\left( \int |f|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq \text{ess sup } |f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

$$r < +\infty \quad p := \frac{r}{s}, \quad q = \frac{r}{r-s}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_s^s &= \int_E |f|^s d\mu = \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \leq \left( \int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}} d\mu \right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left( \int_E 1^{\frac{r}{r-s}} d\mu \right)^{\frac{r-s}{r}} \leq \\ &\leq \|f\|_r^s \mu E^{1-\frac{s}{r}} \end{aligned}$$

□

Следствие 1.3.1.

- $\mu E < +\infty$
- $1 \leq s < r \leq +\infty$
- $f_n \xrightarrow{L^r} f$

Тогда  $f_n \xrightarrow{L^s} f$ 

Доказательство.

$$\|f_n - f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \cdot \|f_n - f\|_r \rightarrow 0$$

□

Теорема 1.4 (о сходимости в  $L^p$  и по мере).

- $1 \leq p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1.  $f \in L^p, f_n \rightarrow f$  в  $L^p \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$
2.  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (либо  $f_n \rightarrow f$  почти везде),  $|f_n| \leq g, g \in L^p$   
Тогда  $f \in L^p$  и  $f_n \rightarrow f$  в  $L^p$

Доказательство.

1.  $X_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0$$

2.  $f_n \xrightarrow{\mu} f, \exists n_k f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде  $\implies |f| \leq g$  почти везде  
 $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$  — суммируема (так как  $g \in L^p$ )

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

□

- **Фундаментальная последовательность:**  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, n > N \quad \|f_n - f_k\| < \varepsilon$ , т.е.  $\|f_n - f_k\| \xrightarrow{n, k \rightarrow +\infty} 0$
- $f_n \rightarrow f \implies f_n$  — фундаментальная  $\|f_n - f_k\| \leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f - f_k\|}_{\rightarrow 0}$
- $C(k)$  — пространство непрерывных функций на компакте  $K$   
 $\|f\| = \max_K |f|$ , утверждение:  $C(K)$  — полное

**Задача 1.**  $L^\infty(X, \mu)$  — полное

**Теорема 1.5.**

- $L^p(X, \mu)$  — полное
- $1 \leq p < +\infty$

*Доказательство.*  $f_n$  — фундаментальная

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \exists N_1 \forall n_1, k > N_1 \quad \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$$

Возьмем один такой  $n_1$  и зафиксируем:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \exists N_2 > n_1 \forall n_2, k > N_2 \quad \|f_{n_2} - f_k\|_p < \frac{1}{4}$$

Повторим это действие. Получим последовательность  $(n_k)$ :

$$\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

Рассмотрим ряд:

$$S(x) = \sum_k |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad S(x) \in [0, +\infty]$$

$S_N$  — частичные суммы ряда  $S$

$$\|S_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

, т.е.  $\int_X S_N^p < 1$ , по теореме Фату:  $\int_X S^p d\mu < 1$ , т.е.  $S^p$  — суммируема  $\implies S$  — почти везде конечна

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

— его частичные суммы — это  $f_{n_{N+1}}(x)$ , т.е. сходимости этого ряда почти везде означает, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде. Проверим, что  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берем  $m = n_k > N$

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

это выполняется при всех больших  $k$ . По теореме Фату:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$$

, т.е.  $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$  □

**Определение.**  $Y$  — метрическое пространство,  $A \subset Y$ ,  $A$  — (всюду) плотно в  $Y$

$$\forall y \in Y \forall U(y) \exists a \in A : a \in U(y)$$

*Пример.*  $\mathbb{Q}$  плотно в  $\mathbb{R}$

**Лемма 1.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \leq p \leq +\infty$

Множество ступенчатых функций (из  $L^p$ ) плотно в  $L^p$

*Замечание.*  $\varphi \in L^p$  — ступенчатая  $\implies (\varphi \neq 0) < +\infty$

*Доказательство.*

$p = \infty$   $f \in L^\infty$ , изменив  $f$  на множестве  $C$  меры 0, считаем, что  $|f| \leq \|f\|_\infty$ . Тогда существуют ступенчатые  $0 \leq \varphi_n \Rightarrow f^+$ ,  $0 \leq \psi_n \Rightarrow f^-$ . Тогда сколько угодно близко к  $f$  можно найти ступенчатую фнкцию вида  $\varphi_n + \psi_n$

$p < +\infty$  Пусть  $f \geq 0$ .  $\exists \varphi_n \geq 0$  — ступенчатая:  $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p \rightarrow 0$$

, по теореме Лебега.  $f$  — любого знака: берем  $f^+$ ,  $f^-$ , ...

□

**Определение.**  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — **финитная**, если  $\exists B(0, r) : f \equiv 0$  вне  $B(0, r)$ .  
 $C_0(\mathbb{R}^m)$  — непрерывные финитные функции.  $\forall p \geq 1$   $C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

**Определение.** Топологическое пространство  $X$  — **нормальное**, если

1. Точки  $X$  — замкнутые множества
2.  $\forall F_1, F_2 \subset X$  — замкнутые,  $\exists U(F_1), U(F_2)$  — открытые и  $U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

**Задача 2.**  $\mathbb{R}^m$  — нормальное