Лекция 9

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Формула Грина **1**

- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$$\int_a^b f ds \quad \int_a^b \langle F, \gamma' \rangle dt = \int_a^b \langle F, \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \rangle ds$$

Мера на кривой — гладкре 1-мерное многообразие, γ — параметризация. Эта мера — образ меры Лебега в $\mathbb{R}^1$ с весом $|\gamma'|$ — интеграл I рода. Общий случай: Интеграл II рода по $(m-1)$-мерной поверхности в $\mathbb{R}^m$. F — векторное поле

$$\int \langle F, n_0 \rangle dS_{m-1} \quad |\Phi'_u \times \Phi'_v| \text{ — вес}$$

Мера Лебега на k-мерном многообразии в $\mathbb{R}^m$. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_k$, тогда λ_k(Паралеллепипед$(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_k)$) — вес

1 Формула Грина

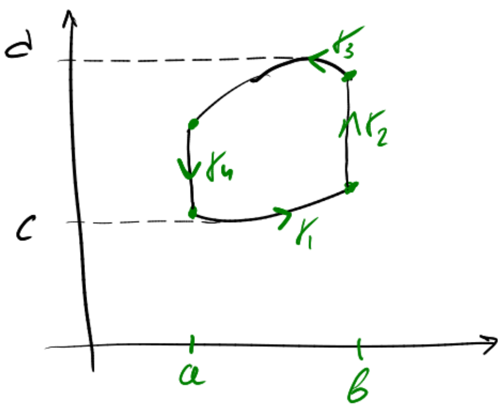
Теорема 1.1.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное, ограниченное
- D — ограничено кусочно гладкой кривой ∂D
- Пусть граница области D ∂D ориентированна, согласована с ориентацией D (против часовой стрелки) — обозначим ∂D^+
- (P, Q) — гладкое векторное поле в окрестности D

Тогда

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = \int_{\partial D^+} P \, dx + Q \, dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем D — ‘криволинейный 4-х угольник‘



∂D — состоит из путей $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$, где γ_2, γ_4 — вертикальные отрезки (возможно вырожденнные), γ_1, γ_3 — гладкие кривые(можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$). Аналогично можно описать границу по отношнию к оси Oy. Проверим, что:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy$$

Левая часть:

$$-\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x))\,dx$$

Правая часть:

$$\int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{0} + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_{0} =$$

$$= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, \varphi_3(x))\,dx$$

□

Примечание. Теорема верна для любой области D с кусочно гладкой границей, которую можно разрезать на криволинейные 4-х угольнинки

$$\int_{\partial D^+} = \int_{\partial D_1^+} + \int_{\partial D_2^+}$$

Теорема 1.2 (Формула Стокса)**.**

- Ω — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ (двустороннее)
- n_0 — сторона Ω
- $\partial\Omega$ — кусочно гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$ — ориентированная кривая с согласованной ориентацией.
- (P, Q, R) — гладкое векторное поле в окрестности Ω

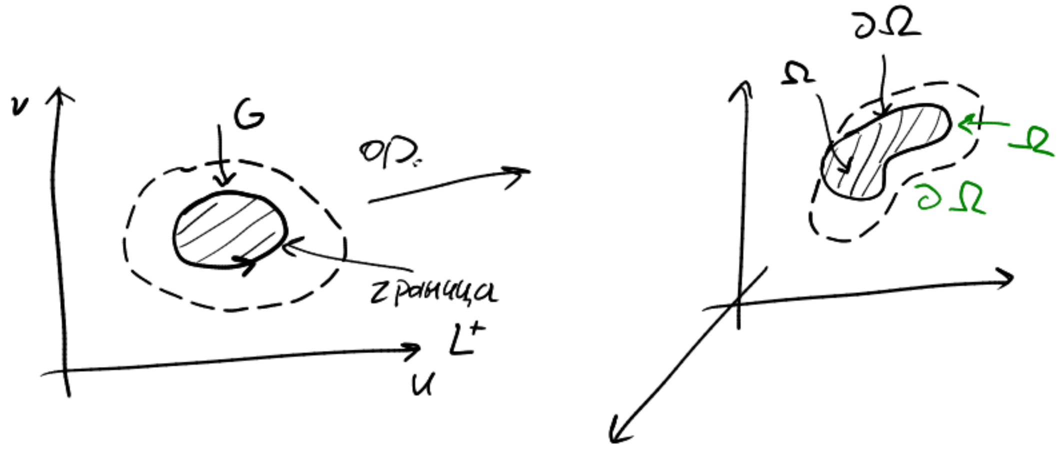
Тогда

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\Omega \in C^2$. Достаточно?:

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$\Phi = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$



$dx\,dy = -dy\,dx,\ dx\,dx = 0$

$$dP\,dx + dQ\,dy + dR\,dz = (P'_x\,dx + P'_y\,dy + P'_z\,dz)\,dx + \dots$$

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \int_{L^+} P\cdot(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv) \tag{1}$$

Параметризируем: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma = (u(t), v(t))$ — параметризируем L^+

$$\int_{\partial\Omega^+} P\,dx = \int_a^b P(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v')dt \tag{2}$$

$\Phi\circ\gamma$ — парметризируем $\partial\Omega^+$, $(\Phi\circ\gamma)' = \Phi'\cdot\gamma'$

$$2 = \int_a^b P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\,du + P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\,dv$$

$$1 = \iint_G \frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\,du\,dv =$$

$$= \iint_G (P'_x\cdot x'_u + P'_y\cdot y'_u + P'_z\cdot z'_u)x'_v + p\cdot x''_{uv} - (P'_x\cdot x'_v + P'_y\cdot y'_v + P'_z\cdot z'_v)x'_u - P\cdot x''_{uv}\,du\,dv =$$

$$= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y}(x'_u y'_v - x'_v y'_u) = \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy$$

□

- $L^p(X,\mu)$, $1 \le p \le +\infty$

$$\left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ — сходится}$$

- $p = \infty:\ \operatorname{ess\,sup}|f| < +\infty$

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

Теорема 1.3.

- $\mu E < +\infty$, $1 \le s < r \le +\infty$

Тогда

1. $L^r(E,\mu) \subset L^s(E,\mu)$
2. $\|f\|_s \le \mu E^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}\cdot\|f\|_r$

Доказательство.

1. Следует из 2)

2. $r = \infty$

$$\left(\int |f|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leq \operatorname{ess\,sup} |f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

$r < +\infty$ $p := \frac{r}{s}$, $q = \frac{r}{r-s}$

$$\|f\|_s^s = \int_E |f|^s \, d\mu = \int_E |f|^s \cdot 1 \, d\mu \leq \left(\int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}} \, d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}} \, d\mu\right)^{\frac{r-s}{r}} \leq$$
$$\leq \|f\|_r^s \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

□

Следствие 1.3.1.

- $\mu E < +\infty$
- $1 \leq s < r \leq +\infty$
- $f_n \xrightarrow[L^r]{} f$

Тогда $f_n \xrightarrow[L^s]{} f$

Доказательство.

$$\|f_n - f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{r} - \frac{1}{r}} \cdot \|f_n - f\|_r \to 0$$

□

Теорема 1.4 (о сходимости в L^p и по мере)**.**

- $1 \leq p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1. $f \in L^p$, $f_n \to f$ в L^p $\implies$ $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$
2. $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$ (либо $f_n \to f$ почти везде), $|f_n| \leq g$, $g \in L^p$
   Тогда $f \in L^p$ и $f_n \to f$ в L^p

Доказательство.

1. $X_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p \, d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \to 0$$

2. $f_n \Rightarrow f$, $\exists n_k$ $f_{n_k} \to f$ почти везде $\implies$ $|f| \leq g$ почти везде
   $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ — суммируема (так как $g \in L^p$)

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow[\text{т. Лебега}]{} 0$$

□

- Фундаментальная последовательность:
  $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall k, n > N \quad \|f_n - f_k\| < \varepsilon$, т.е. $\|f_n - f_k\| \xrightarrow[n,k \to +\infty]{} 0$
- $f_n \to f \implies f_n$ — фундаментальная $\|f_n - f_k\| \leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} + \underbrace{\|f - f_k\|}_{\to 0}$
- $C(k)$ — пространство непрерывных функций на компакте K
  $\|f\| = \max_K |f|$, утверждение: $C(K)$ — полное

Задача 1. $L^\infty(X,\mu)$ — полное

Теорема 1.5.

- $L^p(X,\mu)$ — полное
- $1 \le p < +\infty$

Доказательство. f_n — фундаментальная

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists N_1\ \forall n_1, k > N_1 \quad \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$$

Возьмем один такой n_1 и зафиксируем:

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\ \exists N_2 > n_1\ \forall n_2, k > N_2 \quad \|f_{n_2} - f_k\|_p < \frac{1}{4}$$

Повторим это действие. Получим последовательность (n_k):

$$\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

Рассмотрим ряд:

$$S(x) = \sum_k |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad S(x) \in [0, +\infty]$$

S_N — частичные суммы ряда S

$$\|S_N\|_p \le \sum_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

, т.е. $\int_X S_N^p < 1$, по теореме Фату: $\int_X S^p\, d\mu < 1$, т.е. S^p — суммируема $\implies$ S — почти везде конечна

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

— его частичные суммы — это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. схоимость этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \to f$ почти везде. Проверим, что $\|f_n - f\|_p \to 0$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берем $m = n_k > N$

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p\, d\mu < \varepsilon^p$$

это выполняется при всех больших k. По теореме Фату:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$$

, т.е. $\|f_n - f\| < \varepsilon$ $\square$

Определение. Y — метрическое пространство, $A \subset Y$, A — (всюду) плотно в Y

$$\forall y \in Y\ \forall U(y)\ \exists a \in A:\ a \in U(y)$$

Пример. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$

Лемма 1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \le p \le +\infty$

Множество ступенчатых функций (из L^p) плотно в L^p

Примечание. $\varphi \in L^p$ — ступенчатая $\implies$ $(\varphi \ne 0) < +\infty$

Доказательство.

$p = \infty$ $f \in L^\infty$, изменив f на множестве C меры 0, считаем, что $|f| \leq \|f\|_\infty$. Тогда существуют ступенчатые $0 \leq \varphi_n \rightrightarrows f^+$, $0 \leq \psi_n \rightrightarrows f^-$. Тогда сколько угодно близко к f можно найти ступенчатую фкнцию вида $\varphi_n + \psi_n$

$p < +\infty$ Пусть $f \geq 0$. $\exists \varphi_n \geq 0$ — ступенчатая: $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p \to 0$$

, по теореме Лебега. f — любого знака: берем $f^+, f^-, \dots$

□

Определение. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — **финитная**, если $\exists B(0, r) : f \equiv 0$ вне $B(0, r)$.
$C_0(\mathbb{R}^m)$ — непрерывные финитные функции. $\forall p \geq 1$ $C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Определение. Топологическое пространство X — **нормальное**, если

1. Точки X — замкнутые множества
2. $\forall F_1, F_2 \subset X$ — замкнутые, $\exists U(F_1), U(F_2)$ — открытые и $U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

Задача 2. R^m — нормальное