

# Лекция 8

Лука Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

## Содержание

<b>1 Поверхностный интеграл II рода</b>	<b>1</b>
<b>2 Ряды Фурье</b>	<b>3</b>
2.1 Пространства $L^p$ . . . . .	3
• $M$	
• $\Phi : O \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$	
• $f$	
• $f \circ \Phi$	

$$\int_{M/E} ds = \int_{O/\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi \cdot |\Phi'_u \times \Phi'_v| du dv$$

**Определение.**  $M \subset \mathbb{R}^3$  — **кусочно-гладкое** двумерное многообразие, если  $M$  — конечное объединение:

- простых гладких двумерных многообразий  $M_i$
- гладких кривых
- точек

*Замечание.* Просто так сферу параметризовать не можем, но можем разбить ее на две полусферы и окружность и считать отдельно для каждой из них.

**Определение.**  $E \subset M$  — измеримое, если измеримы все  $E \cap M_i$ .

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

## 1 Поверхностный интеграл II рода

- $M$  — простое гладкое двумерное многообразие в  $\mathbb{R}^3$  — поверхность

**Определение.** **Сторона поверхности** — непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности

- $M \subset \mathbb{R}^3$
- $W : M \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\forall x W(x)$  — нормаль к  $M$ ,  $|W(x)| = 1$ ,  $W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$

*Замечание.* Локально каждая поверхность — двустороннее. В общем случае — 1 или 2 стороны

*Замечание.* График функции  $z(x, y)$

$$\Phi : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\Phi'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \quad \Phi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

— касательные векторы

$$n := \Phi'_x \times \Phi'_y = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

— нормаль

$$n_0 = \pm \left( -\frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\dots}}, \frac{1}{\sqrt{\dots}} \right)$$

*Замечание.* Другой способ задания стороны поверхности

1.  $u, v$  — касательные векторы  
 $u \parallel v$ ,  $(u, v)$  — касательный репер  
 Если задано непрерывное поле реперов, то они задают сторону  $n = u \times v$  (отнормировать)
2. Задана петля + указано непрерывное движение

**Определение.**  $M$  — поверхность в  $\mathbb{R}^3$ ,  $n_0$  — сторона,  $\gamma$  — контур(петля) в  $M$  — ориентированный. Говорят, что **сторона поверхности  $n_0$  согласована с ориентацией  $\gamma$** :  $(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$ ,  $N_{\text{внутр.}}$  — вектор внутренней нормали к области, ограниченной петлей. Т.е. если ориентация  $\gamma$  задает сторону  $n_0$

**Определение.**

- $M$  — простое двумерное гладкое многообразие
- $n_0$  — сторона  $M$
- $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  — векторное поле (непрерывное)

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle ds$$

— **интеграл II рода** векторного поля  $F$  по поверхности  $M$

*Замечание.* Смена стороны = смена знака

*Замечание.* Не зависит от параметра

*Замечание.*  $F = (P, Q, R)$  обозначается

$$\iint_M P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

*Замечание.*  $\Phi, n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle = \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| du dv =$$

$$\int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\text{смешанное произведение}} du dv \quad (1)$$

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle = \det \begin{pmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$1 = \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & z'_v \\ z'_u & y'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} du dv$$

*Пример.* График  $z(x, y)$  над областью  $G$  по верхней стороне

$$\iint_{\Gamma_z} R \, dx \, dy = \iint_{\Gamma_z} 0 \, dy \, dz + 0 \, dz \, dy + R(x, y, z) \, dx \, dy \quad (2)$$

$$n_0 = \left( -\frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\dots}}, \frac{1}{\sqrt{\dots}} \right)$$

$$2 = \iint_{\Gamma_z} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}} \, ds = \iint_G R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy = \iint_G R \, dx \, dy$$

т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции

*Следствие 1.0.1.*

- $V \subset \mathbb{R}^3$
- $M = \partial V$  — гладкая двумерная поверхность
- $n_0$  — внешняя нормаль

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} z \, dx \, dy = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$$

*Следствие 1.0.2.*  $\Omega$  — гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$ ,  $M$  (— цилиндр над  $\Omega$ ) =  $\Omega \times [z_0, z_1]$   
Тогда (сторона  $M$  любая)  $\int_M R \, dx \, dy = 0$

## 2 Ряды Фурье

### 2.1 Пространства $L^p$

**Свойство 1.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$   
 $f(x) = u(x) + iv(x)$   
 $u = \Re f, v = \Im f$
- $f$  — измеримая, если  $u$  и  $v$  — измеримые
- $f$  — суммируемая,  $u$  и  $v$  — суммируемые
- $f$  — суммируемая:  $\int_E f = \int_E u + i \int_E v$

**Свойство 2** (Неравенство Гёльдера).

- $p, q > 1$   $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E$  — измеримое
- $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$  — измеримые

Тогда

$$\int_E |fg| \, d\mu \leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Свойство 3** (Неравенство Минковского). Те-же условия что и в [Неравенстве Гельдера](#)

$$\left( \int_E |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Замечание.* При  $p = 1$  неравенство тоже верно

**Свойство 4.**

**Определение.**  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \subset X$  — измеримое

$$L^p(E, \mu) := \left\{ f : \text{почти везде } E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \mid f \text{ — измеримая, } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

— это линейное пространство (по неравенству Минковского)

$f, g \in L^p(E, \mu) : f \sim g \iff f = g$  почти везде ( $f - g = 0$  почти везде).  $L^p/\sim = L^p(E, \mu)$  — линейной пространством. Задаем норму  $\|f\|_{L^p(E, \mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

**Свойство 5.**

- $L^\infty(E, \mu)$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E$  — измеримое
- $f$  — почти везде  $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримая

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf \{ A \in \overline{\mathbb{R}} \mid f \leq A \text{ почти везде} \}$$

**Свойство 1.**  $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$

**Свойство 2.**  $f \leq \operatorname{ess\,sup} f$  почти везде

*Доказательство.*  $B = \operatorname{ess\,sup} f$

Тогда  $\forall n \ f \leq B + \frac{1}{n}$  почти везде □

**Свойство 3.**  $f$  — сумм.,  $\operatorname{ess\,sup}_E |g| < +\infty$

Тогда

$$\left| \int_E fg \right| \leq \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$$

*Доказательство.*

$$\left| \int_E fg \right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot |f|$$

□

*Замечание.*  $L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C}), \text{ изм., } \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\}/\sim$ . Эквивалентные функции отождествлены — это нормированное пространство

$$\|f\|_{L^\infty(E, \mu)} := \operatorname{ess\,sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

*Замечание.* В новых обозначениях. Неравенство Гельдера:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Здесь можно брать  $p = 1$ ,  $q = +\infty$

*Замечание.*  $f \in L^p \Rightarrow f$  — почти везде конечны.  $1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow$  можно считать  $f$  — задана всюду на  $E$ , и всюду конечна