Лекция 8

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Поверхностный интеграл II рода **1**

2 Ряды Фурье **3**

2.1 Пространства L^p 3

- M
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
- f
- $f \circ \Phi$

$$\int_{M/E} dfs = \int_{O/\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi \cdot |\Phi'_u \times \Phi'_v| \, du \, dv$$

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — **кусочно-гладкое** двумерное многообразие, если M — конечное объединение:

- простых гладких двумерных многообразий M_i
- гладких кривых
- точек

Примечание. Просто так сферу параметризовать не можем, но можем разбить ее на две полусферы и окружность и считать отдельно для каждой из них.

Определение. $E \subset M$ — измеримое, если измеримы все $E \cap M_i$.

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

1 Поверхностный интеграл II рода

- M — простое гладкое двумерное многообразие в R^3 — поверхность

Определение. Сторона поверхности — непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности

- $M \subset \mathbb{R}^3$
- $W : M \to \mathbb{R}^3$

$\forall x \; W(x)$ — нормаль к M, $|W(x)| = 1$, $W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$

Примечание. Локльно каждая повехность — двустороннее. В общем случае — 1 или 2 стороны

Примечание. График функции $z(x, y)$

$$\Phi : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Phi'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \quad \Phi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

— касательные векторы

$$n := \Phi'_x \times \Phi'_y = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

— нормаль

$$n_0 = \pm \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\cdots}}, \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \right)$$

Примечание. Другой способ задания стороны поверхности

1. u, v — касательные векторы
   $u \not\parallel v$, (u, v) — касательный репе́р
   Если задано непрерывное поле реперов, то они задают сторону $n = u \times v$(отнормировать)

2. Задана петля + указано непрерывное движение

Определение. M — поверхность в $\mathbb{R}^3$, n_0 — сторона, γ — контур(петля) в M — ориентированный. Говорят, что **сторона поверхности** n_0 **согласована с ориентацией** γ: $(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$, $N_{\text{внутр.}}$ — вектор внутренней нормали к области, ограниченной петлей. Т.е. если ориентация γ задает сторону n_0

Определение.

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M
- $F : M \to \mathbb{R}^3$ — векторное поле(непрерывное)

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle \, ds$$

— **интеграл II рода** векторного поля F по поверхности M

Примечание. Смена стороны = смена знака

Примечание. Не зависит от параметра

Примечание. $F = (P, Q, R)$ обозначается

$$\iint_M P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

Примечание. $\Phi, n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$

$$\int_M \langle F, n_0 \rangle = \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| \, du \, dv =$$

$$\int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\text{смешанное произведение}} du \, dv \tag{1}$$

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle = \det \begin{pmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$1 = \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & z'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} du \, dv$$

Пример. График $z(x,y)$ над областью G по верхней стороне

$$\iint_{\Gamma_z} R\,dx\,dy = \iint_{\Gamma_z} 0\,dy\,dz + 0\,dz\,dy + R(x,y,z)\,dx\,dy \tag{2}$$

$$n_0 = \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{\cdots}}, \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\right)$$

$$2 = \iint_{\Gamma_z} R(x,y,z)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}}\,ds = \iint_G R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy = \iint_G R\,dx\,dy$$

т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции

Следствие 1.0.1.

- $V \subset \mathbb{R}^3$
- $M = \partial V$ — гладкая двумерная поверхность
- n_0 — внешняя нормаль

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} z\,dx\,dy = \frac{1}{3}\iint_{\partial V} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

Следствие 1.0.2. Ω — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, M (— цилиндр над Ω) $= \Omega\times[z_0,z_1]$
Тогда (сторона M любая) $\int_M R\,dx\,dy = 0$

2 Ряды Фурье

2.1 Пространства L^p

Свойство 1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \mathbb{C}$
  $f(x) = u(x) + iv(x)$
  $u = \Re f,\ v = \Im f$

- f *— измеримая, если* u *и* v *— измеримые*
- f *— суммируемая,* u *и* v *— суммирумые*
- f *— суммируемая:* $\int_E f = \int_E u + \int_E v$

Свойство 2 (Неравенство Гёльдера)**.**

- $p, q > 1$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- E *— измеримое*
- $f, g : E \to \mathbb{C}$ *— измеримые*

Тогда

$$\int_E |fg|d\mu \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Свойство 3 (Неравенство Минковского)**.** *Те-же условия что и в Неравенстве Гельдера*

$$\left(\int_E |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Примечание. При $p = 1$ неравенство тоже верно

Свойство 4.

Определение. L^p, $1 \le p \le +\infty$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \subset X$ — измеримое

$$\mathcal{L}^p(E,\mu) := \left\{ f:\ \text{почти везде } E \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \middle| f \text{ — измеримая}, \int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

— это линейное пространство (по неравенству Минковского)
$f, g \in \mathcal{L}^p(E,\mu) : f \sim g \quad f = g$ почти везде($f - g = 0$ почти везде). $\mathcal{L}^p/_\sim = L^p(E,\mu)$ — линейной пространство. Задаем норму $\|f\|_{L^p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Свойство 5.

- $L^\infty(E,\mu)$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- E — *измеримое*
- f — *почти везде* $E \to \overline{\mathbb{R}}$ — *измеримая*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf\left\{A \in \overline{\mathbb{R}} \middle| f \le A \text{ почти везде}\right\}$$

Свойство 1. $\operatorname{ess\,sup} f \le \sup f$

Свойство 2. $f \le \operatorname{ess\,sup} f$ *почти везде*

Доказательство. $B = \operatorname{ess\,sup} f$
Тогда $\forall n \ f \le B + \frac{1}{n}$ почти везде □

Свойство 3. f — *сумм,* $\operatorname*{ess\,sup}_E |g| < +\infty$
<u>*Тогда*</u>

$$\left|\int_E fg\right| \le \operatorname{ess\,sup}|g| \cdot \int_E |f|$$

Доказательство.

$$\left|\int_E fg\right| \le \int_E |fg| \le \int_E \operatorname{ess\,sup}|g| \cdot |f|$$

□

Примечание. $L^\infty(E,\mu) = \{f :$ п.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}),$ изм.$, \operatorname{ess\,sup}|f| < +\infty\}/_\sim$. Эквивалентные функции отождествленны — это нормированное пространство

$$\|f\|_{L^\infty(E,\mu)} := \operatorname*{ess\,sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

Примечание. В новых обозначениях. Неравенство Гельдера:

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Здесь можно брать $p = 1, \ q = +\infty$

Примечание. $f \in L^p \Rightarrow f$ — почти везде конечны. $1 \le p \le +\infty \Rightarrow$ можно считать f — задана всюду на E, и всюду конечна