Лекция 7

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Принцип Кавальери

Определение. $X\times, \nu, \mu, m$

1. C_x — имзмерима при почти всех x
2. $x \mapsto \nu C_x$ — измерима*
3. $mC = \int\limits_X \mathcal{X}_x d\mu$

Следствие 1.0.1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная
Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f\,d\lambda_1$$

Доказательство. $f > 0$ $\text{ПГ}(f[a, b])$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^2$. $C_x = [0, f(x)]$ $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lambda_2(\text{ПГ}) = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda_1$$

$\square$

Примечание. λ_2 можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением свойства конечной аддитивности и это продолжение не единственно

Примечание. $\lambda_m, m > 2$ — аналогичным образом продолжить невозможно. Парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского

Примечание. Для замечания 1 и замечания 2 требуется инвариантность меры относительно движения $\mathbb{R}^m$

Определение.

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times T \to$
- $\forall x \in X$ f_x — это функция(сечение) $f_x(y) = f(x, y)$, можно считать что она задана на C_x
- f^y — аналогичное сечение

Теорема 1.1 (Тонелли)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечные меры, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ — измерима относительно $A \otimes B$

Тогда

1. при почти всех x f_x — измеримая на Y f^y — измерима на X почти везде
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x d\nu = \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y)$ — измеримая* на X
   $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f^y d\mu$ — измеримая* на Y
3. $\int\limits_{X\times Y} f\, dm = \int\limits_X \varphi d\mu = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$
   $= \int\limits_Y \psi d\nu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство.

1. Пусть $f = \mathcal{X}_C$, $C \subset X \times Y$ — измеримо относительно m. Тогда $f_x(y) = \mathcal{X}_{C_x}(y)$. C_x — измеримо при почти всех $x \implies f_x$ — измерима при почти всех x
   $$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$$
   $\varphi(x)$ — измерима (по принципу Кавальери)
   $$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \xlongequal[\text{пр. Кавальери}]{} mC = \int_{X\times Y} f dm$$
2. f — ступенчатая, ≥ 0
   $$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{C_k} \quad f_x = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{(C_k)_x}$$
   f_x — измерима при почти всех x
   $$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x$$
   $$\int_X \varphi(x) = \sum \alpha_k \int_X \nu(C_k)_x = \sum \alpha_k m C_k = \int_{X\times Y} f dm$$
3. $f \geq 0$ — измеримая. $f = \lim g_n$ ($f(x,y) = \lim g_n(x,y)$ при всех (x,y)), где g_n возврасатют, $g_n \geq 0$, g_n — ступенчатые
   $$f_x = \lim_{n\to+\infty} (g_n)_x$$
   $\implies f_x$ — измеримая на Y
   $$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)}$$
   — верно т.к. $(g_n)_x \leq (g_{n+1})_x$. $\varphi_n(x)$ — измерима $\implies \varphi$ — измерима*
   Заметим что $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \dots$ почти везде
   $$\int_X \varphi(x) \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X\times Y} g_n \xlongequal[\text{т. Леви}]{} \int_{X\times Y} f dm$$

□

Следствие 1.1.2. $C \subset X \times Y$ $P_1(C)$ — измеримо.
Тогда
$$\int\limits_C f dm = \int\limits_{f_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Теорема 1.2 (Фубини)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- ν, μ — σ-конечные
- $m = \nu \times \mu$
- f — суммируема на $X \times Y$ относительно m

Тогда

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ — суммируема на Y
3. $\int\limits_{X\times Y} f\, dm = \int\limits_X \varphi \, d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$

Доказательство. Без доказательства □

Пример.

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx \quad s,t > 0$$

Тогда

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$$

Доказательство.

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}dy\right)dx =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{s-1}y^{t-1}e^{-x}e^{-y}dy\right)dx \underset{y=u-x}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}du\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\dots} \dots d\lambda_2 = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{u} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}dx\right)du =$$

$$\underset{x=u\cdot v}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{1} (uv)^{s-1}(u-uv)^{t-1}e^{-u}\cdot u\, dx\right)du =$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1}e^{-u}\left(\int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,dv\right)du = B(s,t)\Gamma(s+t)$$

□

Пример. Объем(мера) шара в $\mathbb{R}^m$.

$$\alpha_m = \lambda_m(B(0,1)) \quad \lambda_m(B(0,r)) = r^m \cdot \alpha_m$$

$$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^m \big| x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \le 1\}$$

$$B(0,1)_{x_m} = \{x \in \mathbb{R}^{m-1} \big| x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 \le 1 - x_m^2\}$$

$$\alpha_m = \int_{-1}^1 \lambda_{m-1}(B(0,\sqrt{1-y^2}))dy = \int_{-1}^1 \alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{m-1}{2}}dy =$$

$$= 2\alpha_{m-1}\int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = B\left(\frac{m+1}{2},\frac{1}{2}\right)\alpha_{m-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\alpha_{m-1}$$

$$\alpha_m = \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\cdot\dots\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}}_{m-1}\cdot\underbrace{\alpha_1}_{2} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \cdot 2 =$$

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

$m = 3$:

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{4}{3}\pi$$

2 Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностные интегралы I рода

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие. $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация. $E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ по Лебегу

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M | E \text{ — измеримо}\} = \{\varphi(A) | A \in \mathfrak{M}^2,\ A \subset G\}$

Определение. Мера на $\mathfrak{A}_M$

$$S(E) := \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, dudv$$

Т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ

Примечание. $\mathfrak{A}_M$ — σ-алгебра, S — мера

Примечание. $E \subset M$ — компактное $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(E)$ — компактное $\Rightarrow$ измеримое $\Rightarrow$ замкнутые множества измеримы $\Rightarrow$ (относительно) открытые множества измеримы

Примечание. $\mathfrak{A}_M$ не зависит от φ по теореме о двух параметризациях

Примечание. S не зависит от φ

$$|\overline{\varphi'_s} \times \overline{\varphi'_t}| = |(\overline{\varphi'_u} \cdot u'_s + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_s) \times (\overline{\varphi'_u} \cdot u'_t + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_t)| =$$

$$= |\overline{(\varphi'_u \times \varphi'_v)} \cdot (u'_s \cdot v'_t - v'_s \cdot u'_t)| = |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_t \end{pmatrix} \right|$$

Примечание.

- $f : \mathfrak{M} \to \overline{R}$ — измеримая

$M(f < a)$ — измеримая $\Leftrightarrow$ $N(f \circ \varphi < a)$ — измерима относительно $\mathfrak{M}^2$
f — измерима относительно $\mathfrak{A}_M$ $\Leftrightarrow$ $f \circ \varphi$ — измерима относительно $\mathfrak{M}^2$

Определение (поверхностный интеграл I рода)**.**

- M — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$
- φ — параметризация
- $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема по мере s

Тогда

$$\iint\limits_M f \, ds = \iint\limits_M f(x, y, z) \, ds$$

называется **интегралом I рода от** f **по многообразию** M

Примечание. По теореме об интегрировании по взвешенному образу меры

$$\iint\limits_M f\,ds = \iint\limits_G f(\varphi(u,v))|\varphi_v' \times \varphi_v'|\,du\,dv$$

$$\varphi_u' \times \varphi_v' = \begin{pmatrix} i & x_u' & x_v' \\ j & y_u' & y_v' \\ k & z_u' & z_v' \end{pmatrix}$$

$$|\varphi_u' \times \varphi_v'| = |\varphi_u'| \cdot |\varphi_v'| \sin\alpha = \sqrt{|\varphi_u'|^2 \cdot |\varphi_v'|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$E = |\varphi_u'| = {x_u'}^2 + {y_u'}^2 + {z_u'}^2$$

$$F = \langle \varphi_u', \varphi_v' \rangle = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v' \quad F = |\varphi_v'|^2$$