

Лекция 7

Луа Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1	Принцип Кавальери	1
2	Поверхностные интегралы	4
2.1	Поверхностные интегралы I рода	4

1 Принцип Кавальери

Определение. $X \times \nu, \mu, m$

1. C_x — измерима при почти всех x
2. $x \mapsto \nu C_x$ — измерима*
3. $mC = \int_X \mathcal{X}_x d\mu$

Следствие 1.0.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная
Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$$

Доказательство. $f > 0$ ПГ($f[a, b]$) — измеримое множество в \mathbb{R}^2 . $C_x = [0, f(x)]$ $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda_2(\text{ПГ}) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

Замечание. λ_2 можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением свойства конечной аддитивности и это продолжение не единственно

Замечание. $\lambda_m, m > 2$ — аналогичным образом продолжить невозможно. Парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского

Замечание. Для **замечания 1** и **замечания 2** требуется инвариантность меры относительно движения \mathbb{R}^m

Определение.

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times T \rightarrow$
- $\forall x \in X f_x$ — это функция(сечение) $f_x(y) = f(x, y)$, можно считать что она задана на C_x
- f^y — аналогичное сечение

Теорема 1.1 (Тонелли).

- (X, \mathfrak{A}, μ)

- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- μ, ν — σ -конечные меры, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ — измерима относительно $A \otimes B$

Тогда

1. при почти всех x f_x — измеримая на Y f^y — измерима на X почти везде
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измеримая* на X
 $y \mapsto \psi(y) = \int_X f^y d\mu$ — измеримая* на Y
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$
 $= \int_Y \psi d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство.

1. Пусть $f = \mathcal{X}_C$, $C \subset X \times Y$ — измеримо относительно m . Тогда $f_x(y) = \mathcal{X}_{C_x}(y)$. C_x — измеримо при почти всех $x \implies f_x$ — измерима при почти всех x

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$$

$\varphi(x)$ — измерима (по принципу Кавальери)

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \stackrel{\text{пр. Кавальери}}{=} mC = \int_{X \times Y} f dm$$

2. f — ступенчатая, ≥ 0

$$f = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{C_k} \quad f_x = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{(C_k)_x}$$

f_x — измерима при почти всех x

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x$$

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum \alpha_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum \alpha_k m C_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$ — измеримая. $f = \lim g_n$ ($f(x, y) = \lim g_n(x, y)$ при всех (x, y)), где g_n возвращаются, $g_n \geq 0$, g_n — ступенчатые

$$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x$$

$\implies f_x$ — измеримая на Y

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)}$$

— верно т.к. $(g_n)_x \leq (g_{n+1})_x$. $\varphi_n(x)$ — измерима $\implies \varphi$ — измерима*

Заметим что $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \dots$ почти везде

$$\int_X \varphi(x) d\mu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \lim \int_X \varphi_n d\mu = \lim \int_{X \times Y} g_n d\mu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \int_{X \times Y} f dm$$

□

Следствие 1.1.2. $C \subset X \times Y$ $P_1(C)$ — измеримо.

Тогда

$$\int_C f dm = \int_{f_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Теорема 1.2 (Фубини).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- ν, μ — σ -конечные
- $m = \nu \times \mu$
- f — суммируема на $X \times Y$ относительно m

Тогда

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — суммируема на X
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Доказательство. **Без доказательства** □

Пример.

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx \quad s, t > 0$$

Тогда

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^{s-1} y^{t-1} e^{-x} e^{-y} dy \right) dx \stackrel{y=u-x}{=} \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx = \\ &= \int \dots d\lambda_2 = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} dx \right) du = \\ &\dots \\ &\stackrel{x=u-v}{=} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 (uv)^{s-1} (u-uv)^{t-1} e^{-u} \cdot u dx \right) du = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left(\int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du = B(s, t)\Gamma(s+t) \end{aligned}$$

□

Пример. Объем(мера) шара в \mathbb{R}^m .

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \lambda_m(B(0, 1)) \quad \lambda_m(B(0, r)) = r^m \cdot \alpha_m \\ B(0, 1) &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\} \\ B(0, 1)_{x_m} &= \{x \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 \leq 1 - x_m^2\} \\ \alpha_m &= \int_{-1}^1 \lambda_{m-1}(B(0, \sqrt{1-y^2})) dy = \int_{-1}^1 \alpha_{m-1} (1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy = \\ &= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \alpha_{m-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \alpha_{m-1} \\ \alpha_m &= \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \dots \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}}_{m-1} \cdot \underbrace{\alpha_1}_2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \cdot 2 =$$

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}$$

$m = 3$:

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} = \frac{4}{3}\pi$$

2 Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностные интегралы I рода

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие. $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — параметризация. $E \subset M$ — измеримо по Лебегу, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в \mathbb{R}^2 по Лебегу

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M | E \text{ — измеримо}\} = \{\varphi(A) | A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

Определение. Мера на \mathfrak{A}_M

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, dudv$$

Т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ

Замечание. \mathfrak{A}_M — σ -алгебра, S — мера

Замечание. $E \subset M$ — компактное $\Rightarrow \varphi^{-1}(E)$ — компактное \Rightarrow измеримое \Rightarrow замкнутые множества измеримы \Rightarrow (относительно) открытые множества измеримы

Замечание. \mathfrak{A}_M не зависит от φ по теореме о двух параметризациях

Замечание. S не зависит от φ

$$|\overline{\varphi'_s \times \varphi'_t}| = |(\overline{\varphi'_u} \cdot u'_s + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_s) \times (\overline{\varphi'_u} \cdot u'_t + \overline{\varphi'_v} \cdot v'_t)| =$$

$$= |(\overline{\varphi'_u \times \varphi'_v}) \cdot (u'_s \cdot v'_t - v'_s \cdot u'_t)| = |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_t \end{pmatrix} \right|$$

Замечание.

- $f : \mathfrak{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая

$M(f < a)$ — измеримая $\Leftrightarrow N(f \circ \varphi < a)$ — измерима относительно \mathfrak{M}^2
 f — измерима относительно $\mathfrak{A}_M \Leftrightarrow f \circ \varphi$ — измерима относительно \mathfrak{M}^2

Определение (поверхностный интеграл I рода).

- M — простое гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3
- φ — параметризация
- $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема по мере s

Тогда

$$\iint_M f \, ds = \iint_M f(x, y, z) \, ds$$

называется **интегралом I рода от f по многообразию M**

Замечание. По теореме об интегрировании по взвешенному образу меры

$$\iint_M f ds = \iint_G f(\varphi(u, v)) |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{pmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \sin \alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 \cdot |\varphi'_v|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$E = |\varphi'_u|^2 = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$$

$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \quad F = |\varphi'_v|^2$$