Лекция 6

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

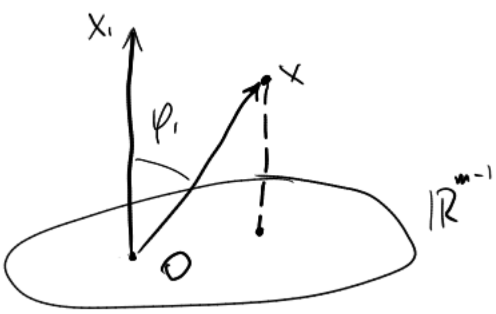
1 Сферические координаты в R^m **1**

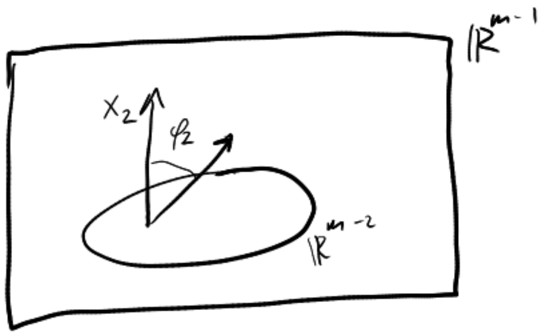
2 Произведение мер **2**

1 Сферические координаты в R^m

Пример.

- $r, \varphi_1, \dots \varphi_{m-1}$
- $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}^{m-1} \supset \dots \supset \mathbb{R}^2$ В кажои из очередных пространств $\mathbb{R}^k$ фиксируем ортогональное к $\mathbb{R}^{k-1}$
- φ_1 — угол между $\overline{e_1}$ и $Ox \in [0, \pi]$
- φ_2 — угол между $\overline{e_2}$ и $P_{2_{(e_2\ \dots\ e_m)}}(x) \in [0, \pi]$
- $\vdots$
- φ_{m-1} — просто полярный угол в $\mathbb{R}^m$





$$x_1 = r \cos \varphi_1$$
$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$
$$x_3 = 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$$
$$\vdots$$
$$x_{m-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$$
$$x_m = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$$
$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$$ [1]

Сделаем в цикле эти координаты:

[1] В R^3 “географические“ координаты $J = r^2 \cos \psi$

шаг 1 $x_m = \rho_{m-1} \sin\varphi_{m-1}$
$x_{m-1} = \rho_{m-1}\cos\varphi_{m-1}$
$(x_1 \ \dots \ x_n) \rightsquigarrow (x_1 \ \dots \ x_{m-2}, \ \rho_{m-1}, \ \varphi_{m-1})$

шаг 2 $\rho_{m-1} = \rho(m_2)\sin\varphi_{m-2}$
$x_{m-2} = \rho_{m-2}\cos\varphi_{m-2}$
$(x_1 \ \dots \ x_{m-2}, \ \rho_{m-1}, \ \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \ \dots \ x_{m-3}, \ \rho_{m-2}, \ \varphi_{m-2}, \ \varphi_{m-1})$

$\vdots$

последний шаг $(x_1, \ \rho_2, \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r, \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_{m-1})$
$\rho_2 = r\sin\varphi_1$
$x_1 = r\cos\varphi_1$

$$\lambda_m(\Omega) = \int\limits_\Omega 1 d\lambda_m \underset{\text{1 шаг}}{=\!=\!=} \int\limits_{\Omega_1} \rho_{m-1} \underset{\text{2 шаг}}{=\!=\!=} \int\limits_{\Omega_2} \rho_{m-2}^2 \sin\varphi_{m-2} \underset{\text{3 шаг}}{=\!=\!=} \int\limits_{\Omega_3} \rho_{m-3}^3 \sin^2\varphi_{m-3}\sin\varphi_{m-2} d\lambda =$$
$$= \dots = \int\limits_{\Omega_{m-1}} r^{m-1}\sin^{n-2}\varphi_1 \dots \sin\varphi_{m-2}$$

2 Произведение мер

Лемма 1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — *п/к* $\Rightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y | A \in \mathfrak{A}, \ B \in \mathfrak{B}\}$ — *п/к*

Пример. Ячейки: В $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}^1, \ \mathfrak{B} \in \mathcal{P}^1$
$A \times B$ — ячейка из $\mathcal{P}^2$

Обозначение. $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — множества из этой системы называются измеримыми прямоугольниками

Определение. $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$ — недоделанная **мера измеримого прямоугольника**

Теорема 2.1.

1. m_0 — мера на $\mathcal{P}$
2. ν, μ — σ-конечные $\Rightarrow m_0$ — тоже σ-конечная

Доказательство.

1. $?m_0$ — счетно аддитивна $?m_0 P = \sum m_o P_k$, если
$$A \times B = P = \bigsqcup P_k, \text{ где } P_k = A_k \times B_k$$
Наблюдение: $\mathcal{X}_{A\times B}(x, y) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(y)$
Тогда $\mathcal{X}_P = \sum \mathcal{X}_{P_k}$, т.е.
$$\forall x \in X, y \in Y \quad \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y) = \sum \mathcal{X}_{A_k}(x)\mathcal{X}_{B_k}(y)$$
проинтегрируем по y по мере ν:
$$\mathcal{X}_A(x)\nu B = \sum \mathcal{X}_A(x) \cdot \nu B_k$$
Интегрируем по x:
$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$$
2. Очев. μ — σ-конечная $\Rightarrow$ $X = \bigcup X_k$, μX_k — конечная ν — σ-конечная $\Rightarrow$ $Y = \bigcup Y_n$, νY_k — конечная
$$X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n \quad m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n \text{ — конечная}$$
$\Rightarrow m_0$ — σ-конечная мера

□

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 с п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на σ-алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

Определение. $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \nu \times \mu)$ — **произведение пространств с мерой** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

Замечание.

1. Это произведение ассоциативно
2. σ-конечность нужна для единственности произведения

Теорема 2.2. $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{n+m}$

Доказательство. Без доказательсва □

Определение.

- X, Y — множества
- $C \subset X \times Y$

$$C_x := \{y \in Y | (x, y) \in C\}$$
$$C^y := \{x \in X | (x, y) \in C\}$$

Замечание.

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcup (C_\alpha)_x$$
$$\left(\bigcap_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcap_\alpha (C_\alpha)_x$$
$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

Теорема 2.3 (Кавальери)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- ν, μ — σ-конечные, полные
- $m := \mu \times \nu$

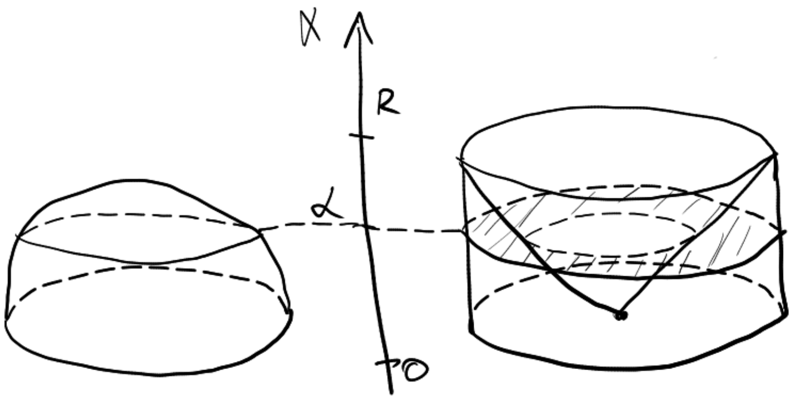
Пусть $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$
Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая[2] функция на X
3. $mC = \int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y

Пример. Половину шара сопоставляем с конусом.

[2]функция задана при почти всех x. Она равна почти везде некоторой измеримой функции, которая задана на всем X. Это “не мешает“ утверждению 3



- C_x =круг
- C_x =кольцо

$$\lambda(C_x) = \pi(R^2 - x^2)$$
$$\lambda(C_x) = \pi R^2 - \pi x^2$$
$$\nu(\frac{1}{2}\text{шара}) = \nu(\text{цилиндр} \setminus \text{конус}) = \pi R^2 - \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Доказательство. $\mathcal{D}$ — система множеств, для которых выполнено 1. - 3.

1. $C = A \times B \Rightarrow C \in \mathcal{D}$
   (a) $C_x = \begin{bmatrix} \emptyset & x \notin A \\ B & x \in A \end{bmatrix}$
   (b) $x \mapsto \nu(C_x)$ — это функция $\nu B \cdot \mathcal{X}_A$
   (c) $\int \nu(C_x) d\mu = \int\limits_X \nu B \cdot \mathcal{X}_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in \mathcal{D}$ — дизъюнктны $\Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathcal{D}$
   $E_i \in \mathcal{D} \Rightarrow (E_i)_x$ — измеримое почти везде $\Rightarrow$ при почти всех x все $(E_i)_x$ – измеримые
   (a) Тогда при этих x $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$
   (b) $\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\text{измеримая функция}} \Rightarrow$ функция $x \mapsto \nu E_x$ измеримая[2]
   (c) $$\int\limits_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int\limits_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE$$
3. $E_i \in \mathcal{D},\ E_1 \supset E_2 \supset \dots,\ E = \bigcap\limits_i E_i,\ \mu E_i < +\infty$ Тогда $E \in \mathcal{D}$
   $$\int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — конечная при почти всех } x$$
   (a) $\forall x$ верно $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots,\ E_x = \bigcap (E_i)_x$. Тогда E_x — измеримое при почти всех x и $\lim\limits_{i\to+\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при почти всех x
   (b) Таким образом $x \mapsto \nu E_x$ — измеримая[2]
   (c) $$\int\limits_X \nu E_x d\mu = \lim \int \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$$
   Первое равенство по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: $|\nu(E_i)_x| \le \nu(E_1)_x$ — из[2]

Итог: $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathcal{D}$

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$
$$mE = \inf \left\{ \sum m_0 P_k | E \subset \bigcup P_k,\ P_k \in \mathcal{P} \right\}$$
— теорема о лебеговском продолжении.
$\exists$ множества H вида $\bigcap\limits_l \bigcup\limits_k P_{kl}$ (т.е. $H \in \mathcal{D}$)
$E \subset H, mH = mE = 0$
$$0 = mH = \int\limits_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x \sim 0 \text{ } (= 0 \text{ при почти всех } x)$$
$E_x \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow$
   (a) E_x — измерима при почти всех x
   (b) $\nu E_x = 0$ почти везде
   (c) $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$
5. C — m-измеримо, $mC < +\infty$ тогда $C \in \mathcal{D}$
$C = H \setminus e$, где H — вида $\bigcap\limits_l \bigcup\limits_k P_{kl},\ me = 0,\ mC = mH$
   (a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — измерима при почти всех x, т.к. ν — полная
   (b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x \Rightarrow$ измерима
   (c) $\int\limits_X \nu C_x d\mu = \int\limits_X \nu H_x d\mu = mH = mC$
6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathcal{D}$
$$X = \bigsqcup X_k,\ \mu X_k < +\infty,\ Y = \bigsqcup Y_j,\ \nu Y_j < +\infty$$
$$C = \bigsqcup (C \cap (X_k \times Y_j)) \text{ — используем 2.}$$

□

Следствие 2.3.1. C — измеримое в $X \times Y$. Пусть $P_1(C) = \{x \in X | C_x \neq 0\}$ — проекция C на X. Если $P_1(C)$ — измеримое, то:
$$mC = \int\limits_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Доказательство. при $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$ □

Замечание.

1. C — измеримое $\not\Rightarrow P_1(C)$ — измеримое
2. C — измеримое $\not\Rightarrow \forall x\ C_x$ — измеримо
3. $\forall x \forall y\ C_x, C^y$ — измеримые $\not\Rightarrow C$ — измеримое (пример Серпинского)