

Лекция 6

Луя Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

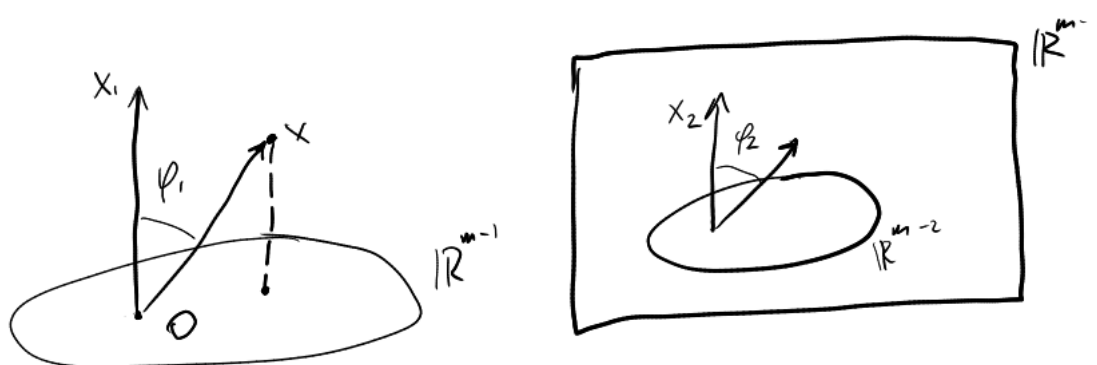
Содержание

1 Сферические координаты в R^m	1
2 Произведение мер	2

1 Сферические координаты в R^m

Пример.

- $r, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$
- $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}^{m-1} \supset \dots \supset \mathbb{R}^2$ В каждой из очередных пространств \mathbb{R}^k фиксируем ортогональное к \mathbb{R}^{k-1}
- φ_1 — угол между \bar{e}_1 и $Ox \in [0, \pi]$
- φ_2 — угол между \bar{e}_2 и $P_{2(e_2 \dots e_m)}(x) \in [0, \pi]$
- \vdots
- φ_{m-1} — просто полярный угол в \mathbb{R}^m



$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$$

\vdots

$$x_{m-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$$

$$x_m = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$$

$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$$
¹

Сделаем в цикле эти координаты:

¹В \mathbb{R}^3 "географические" координаты $J = r^2 \cos \psi$

шаг 1 $x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}$
 $x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}$
 $(x_1 \dots x_n) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1})$

шаг 2 $\rho_{m-1} = \rho(m_2) \sin \varphi_{m-2}$
 $x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}$
 $(x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-3}, \rho_{m-2}, \varphi_{m-2}, \varphi_{m-1})$

⋮

последний шаг $(x_1, \rho_2, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r, \varphi_1 \dots \varphi_{m-1})$
 $\rho_2 = r \sin \varphi_1$
 $x_1 = r \cos \varphi_1$

$$\begin{aligned} \lambda_m(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 d\lambda_m \stackrel{1 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_1} \rho_{m-1} \stackrel{2 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_2} \rho_{m-2}^2 \sin \varphi_{m-2} \stackrel{3 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_3} \rho_{m-3}^3 \sin^2 \varphi_{m-3} \sin \varphi_{m-2} d\lambda = \\ &= \dots = \int_{\Omega_{m-1}} r^{m-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \end{aligned}$$

2 Произведение мер

Лемма 1.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} - n/\kappa \Rightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y \mid A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\} - n/\kappa$

Пример. Ячейки: $B \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}^1, \mathfrak{B} \in \mathcal{P}^1$
 $A \times B -$ ячейка из \mathcal{P}^2

Обозначение. $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — множества из этой системы называются измеримыми прямоугольниками

Определение. $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$ — недоделанная мера измеримого прямоугольника

Теорема 2.1.

1. m_0 — мера на \mathcal{P}
2. $\nu, \mu - \sigma$ -конечные $\Rightarrow m_0 -$ тоже σ -конечная

Доказательство.

1. m_0 — счетно аддитивна $m_0 P = \sum m_0 P_k$, если

$$A \times B = P = \bigsqcup P_k, \text{ где } P_k = A_k \times B_k$$

Наблюдение: $\mathcal{X}_{A \times B}(x, y) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(y)$

Тогда $\mathcal{X}_P = \sum \mathcal{X}_{P_k}$, т.е.

$$\forall x \in X, y \in Y \quad \mathcal{X}_A(x) \mathcal{X}_B(y) = \sum \mathcal{X}_{A_k}(x) \mathcal{X}_{B_k}(y)$$

проинтегрируем по y по мере ν :

$$\mathcal{X}_A(x) \nu B = \sum \mathcal{X}_A(x) \cdot \nu B_k$$

Интегрируем по x :

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$$

2. Очев. $\mu - \sigma$ -конечная $\Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k -$ конечная $\nu - \sigma$ -конечная $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_k -$ конечная

$$X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n \quad m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n - \text{конечная}$$

$\Rightarrow m_0 - \sigma$ -конечная мера

□

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ -конечные

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 с п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на σ -алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

Определение. $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \nu \times \mu)$ — **произведение пространств с мерой** (X, \mathfrak{A}, μ) и (Y, \mathfrak{B}, ν)

Примечание.

1. Это произведение ассоциативно
2. σ -конечность нужна для единственности произведения

Теорема 2.2. $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{n+m}$

Доказательство. [Без доказательства](#)

□

Определение.

- X, Y — множества
- $C \subset X \times Y$

$$C_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X \mid (x, y) \in C\}$$

Примечание.

$$\left(\bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup_{\alpha} (C_{\alpha})_x$$

$$\left(\bigcap_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcap_{\alpha} (C_{\alpha})_x$$

$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

Теорема 2.3 (Кавальери).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- ν, μ — σ -конечные, полные
- $m := \mu \times \nu$

Пусть $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

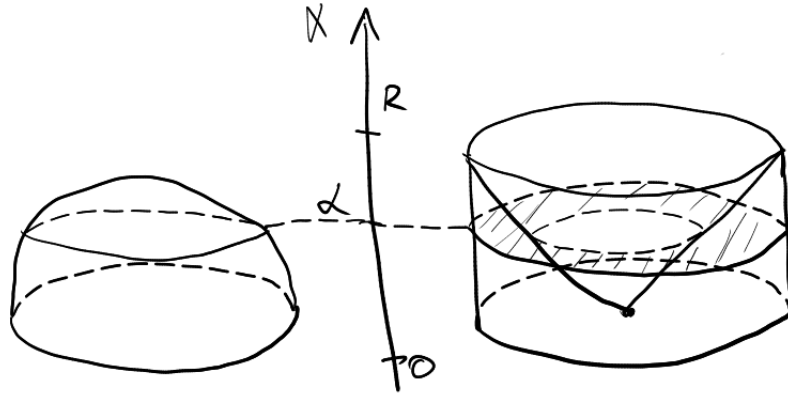
Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая² функция на X
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y

Пример. Половину шара сопоставляем с конусом.

²функция задана при почти всех x . Она равна почти везде некоторой измеримой функции, которая задана на всем X . Это “не мешает” утверждению 3



- $C_x = \text{круг}$
- $C_x = \text{кольцо}$

$$\lambda(C_x) = \pi(R^2 - x^2)$$

$$\lambda(C_x) = \pi R^2 - \pi x^2$$

$$\nu\left(\frac{1}{2}\text{шара}\right) = \nu(\text{цилиндр} \setminus \text{конус}) = \pi R^2 - \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Доказательство. \mathcal{D} — система множеств, для которых выполнено 1. - 3.

$$1. C = A \times B \Rightarrow C \in \mathcal{D}$$

$$(a) C_x = \begin{cases} \emptyset & x \notin A \\ B & x \in A \end{cases}$$

$$(b) x \mapsto \nu(C_x) \text{ — это функция } \nu B \cdot \chi_A$$

$$(c) \int \nu(C_x) d\mu = \int \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$$

$$2. E_i \in \mathcal{D} \text{ — дизъюнкты } \Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathcal{D}$$

$E_i \in \mathcal{D} \Rightarrow (E_i)_x \text{ — измеримо почти везде } \Rightarrow \text{при почти всех } x \text{ все } (E_i)_x \text{ — измеримые}$

$$(a) \text{ Тогда при этих } x E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$$

$$(b) \nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\text{измеримая функция}} \Rightarrow \text{функция } x \mapsto \nu E_x \text{ измеримая}^2$$

$$(c)$$

$$\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE$$

$$3. E_i \in \mathcal{D}, E_1 \supset E_2 \supset \dots, E = \bigcap_i E_i, \mu E_i < +\infty \text{ Тогда } E \in \mathcal{D}$$

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — конечная при почти всех } x$$

$$(a) \forall x \text{ верно } (E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots, E_x = \bigcap (E_i)_x. \text{ Тогда } E_x \text{ — измеримо при почти всех } x \text{ и } \lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x \text{ при почти всех } x$$

$$(b) \text{ Таким образом } x \mapsto \nu E_x \text{ — измеримая}^2$$

$$(c)$$

$$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$$

Первое равенство по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x \text{ — из}^2$

Итого: $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathcal{D}$

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$

$$mE = \inf \left\{ \sum m_0 P_k \mid E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P} \right\}$$

— теорема о лебеговском продолжении.

\exists множества H вида $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$ (т.е. $H \in \mathcal{D}$)

$E \subset H, mH = mE = 0$

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x \sim 0 \quad (= 0 \text{ при почти всех } x)$$

$E_x \subset H_x, \nu$ — полная \Rightarrow

(a) E_x — измерима при почти всех x

(b) $\nu E_x = 0$ почти везде

(c) $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$

5. C — m -измеримо, $mC < +\infty$ тогда $C \in \mathcal{D}$

$C = H \setminus e$, где H — вида $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$, $me = 0$, $mC = mH$

(a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — измерима при почти всех x , т.к. ν — полная

(b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x \Rightarrow$ измерима

(c) $\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$

6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathcal{D}$

$$X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$$

$$C = \bigsqcup (C \cap (X_k \times Y_j)) \text{ — используем 2.}$$

□

Следствие 2.3.1. C — измеримое в $X \times Y$. Пусть $P_1(C) = \{x \in X \mid C_x \neq \emptyset\}$ — проекция C на X . Если $P_1(C)$ — измеримое, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Доказательство. при $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$

□

Примечание.

1. C — измеримое $\not\Rightarrow P_1(C)$ — измеримое

2. C — измеримое $\not\Rightarrow \forall x C_x$ — измеримо

3. $\forall x \forall y C_x, C_y$ — измеримые $\not\Rightarrow C$ — измеримое (пример Серпинского)