

Лекция 5

Луя Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1	Плотности	1
2	Мера лебега	2

1 Плотности

Определение. (X, \mathfrak{A}, μ) и $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — меры

Плотность меры ν относительно μ — это функция $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая

$$\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$$

Теорема 1.1 (критерий плотности).

- (X, \mathfrak{A}, μ) , ν — еще одна мера
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая

Тогда ω — плотность ν относительно $\mu \Leftrightarrow$

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A \omega$$

Пример (нет плотности).

- $X = \mathbb{R}$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}'$
- $\mu = \lambda_1$
- ν — одноточечная мера $\nu(A) = \begin{cases} 1 & \text{, если } 0 \in A \\ 0 & \text{, иначе} \end{cases}$
считаем $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$

Теорема 1.2 (Необходимое условие существования плотности). $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Теорема 1.3 (теорема Радона-Никодина). Это так-же достаточное условие

Доказательство критерия плотности.

(\Rightarrow) очевидно

(\Leftarrow) Не умаляя общности $\omega > 0 : e = X(\omega = 0)$

$$\nu(e) = \int_e \omega d\mu = 0$$

Для случая когда $A \cap e = \emptyset$ все только лучше

Фиксируем $q \in (0, 1)$

$$A_j = A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{c} q^{-1} \quad q^{-2} \\ \hline 0 \quad q^2 \quad q \quad 1 = q^0 \end{array} \rightarrow$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \nu A_j \leq \mu A_j \cdot q^{j-1} \quad (1)$$

$$\mu A_j \cdot q^j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq \mu A_j \cdot q^{j-1} \quad (2)$$

Тогда

$$q \cdot \int_A \omega d\mu \leq q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \leq \sum q^j \mu A_j \leq \sum \nu A_j \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu = \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

то есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

и $q \rightarrow 1 - 0$

□

Лемма 1.

- f, g — суммируемые
- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $\forall A \in \mathfrak{A}: \int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство. $h := f - g$

Дано $\forall A \in \mathfrak{A} \int_A h = 0$

Доказать $h = 0$ почти везде

- $A_+ := X(h \geq 0)$
- $A_- := X(h < 0)$

$$X = A_+ \sqcup A_-$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$$

$$\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0$$

тогда

$$\int_X |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ почти везде

□

Замечание. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство отображений $l_A : f \mapsto \int_A f d\mu$ — линейный функционал
Таким образом множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ — разделяет точки
 $\forall f, g \in \mathcal{L}(X) \exists A l_A(f) \neq l_A(g)$

2 Мера лебега

Лемма 2 (о мере образа малых кубических ячеек).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое
- $a \in O$
- $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$

Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \forall$ куба $Q \subset B(a, \delta)$, $a \in Q$

выполняется неравенство $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Замечание. Здесь можно считать что кубы замкнутые

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(a) + L \cdot (x - a) + o(x - a) \quad x \rightarrow a \\ a + \underbrace{L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} &= x + o(x - a)\end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ шар } B_\varepsilon(a) \forall x \in B_\varepsilon(a) |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a)$ $a \in Q$ — куб со стороной h . При $x \in Q$: $|x - a| \leq \sqrt{m}h$

$$|\Psi(x) - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ Куб со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$: при $x, y \in Q$

$$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \leq (1 + 2\varepsilon)h$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq \underbrace{|\det L| \cdot (1 + 2\varepsilon)^m}_{\text{выбираем } \varepsilon \text{ чтобы } \dots < c} \lambda Q$$

потом берем $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$

□

Лемма 3.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое
- $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное
- $Q \subset \bar{Q} \subset O$ — кубическая ячейка
- $A \subset Q$

Тогда

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G - \text{открытое} \subset O}} \left(\lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Теорема 2.1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \in O$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство. Обозначим якобиан $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$

$\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера. Т.е. надо доказать: J_Φ — плотность ν относительно λ . Тогда достаточно проверить условие критерия плотности

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (3)$$

Достаточно проверить только правое неравенство. левое — это "правое для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1} "

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

1. Проверяем второе неравенство 3 для случая когда A — кубическая ячейка. $A \subset \bar{A} \subset O$. От противного:

$$\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$$

Возьмем $C > \sup_Q J_\Phi$: $C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$. Запускаем процесс половинного деления: Режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую" ячейку $Q_1 \subset Q$: $C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берем Q_2 : $C \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и так далее

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \quad (4)$$

$$a \in \bigcap \bar{Q}_i \quad C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\bar{Q}} J_\Phi, \text{ в частности } C > |\det \Phi'(a)|$$

Получаем противоречие с леммой: в сколь угодно малой окрестности a имеются кубы \bar{Q}_n , где выполняется 4. **Противоречие**

2. Проверим второе неравенство 3 для открытых множеств $A \subset O$
Это очевидно $A = \bigsqcup Q_j$, Q_j — кубическая ячейка, $Q_j \subset \bar{Q}_j \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (5)$$

3. По лемме второе неравенство 3 выполнено для всех измеримых A

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \bar{Q}_j \subset O$$

$$A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j} \quad A_j \subset G \text{ — открытое}$$

$$\nu A_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \inf_{\substack{A_j \subset G \\ G \text{ — откр.}}} (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

Аналогично 5 получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$ □

Теорема 2.2.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм

Тогда $\forall f$ — измеримых, ≥ 0 , заданных на $O' = \Phi(O)$

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda$$

, где $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$. То же верно для суммируемых функций f

Доказательство. Применяем теорему о взвешенном образе меры.

Дано:

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- $\Phi : X \rightarrow Y$ — с сохранением измеримости
- $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$
- $\omega : Y \rightarrow \mathbb{R}, \geq 0$, измеримый
- ν — взвешенный образ μ с весом ω :

$$\mu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

В нашем случае

- $X = Y = \mathbb{R}^m$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$
- Φ — диффеоморфизм
- $\mu = \lambda$
- $\nu(A) = \lambda\Phi(A)$

Под действием гладкого отображения Φ , σ -алгебра \mathfrak{M}^m сохраняется
По [теореме](#)

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(A)} J_{\Phi} d\lambda$$

т.е. λ — взвешенный образ исходной меры Лебега по отношению к Φ □

Пример. Полярные координаты в R^2 .

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Phi : \{(r, \varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

— диффеоморфизм

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = r \quad J_{\Phi} = r$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) = d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\lambda_{r, \varphi}$$

Пример. Сферические координаты в R^3

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad \begin{cases} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi) \\ \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = r^2(\sin^2 \psi \cos \psi + \cos^3 \psi) = r^2 \cos \psi = J_{\Phi}$$

— для географических координат: r — расстояние от центра Земли, ψ — угол к плоскости экватора