

Лекция 4

Луа Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1 Плотность одной меры по отношению к другой	4
1.1 Замена переменных в интеграле	4

Теорема 0.1 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E$ — измеримое, $\mu E < \delta \implies \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

Следствие 0.1.1.

- f — суммируемая
- $\mu E_n \rightarrow 0$

Тогда $\int_{E_n} f \rightarrow 0$

Доказательство. Возьмем множества $X_n := X(|f| \geq n)$, очевидно что $X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$, а также $\mu(\bigcap X_n) = 0$

Утверждение: $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ — это свойство непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, тогда при $\mu E < \delta$

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| \leq \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

Правда ли что:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \forall \varepsilon > 0 \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$$

эквивалентны.

(\Rightarrow) **Нет.** $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$

$$f_n = \frac{1}{nx} f_n \xrightarrow{\lambda} 0$$

$$\int |f_n - f| = +\infty \text{ — при всех } n$$

(\Leftarrow) **Да.**

$$\underbrace{\mu X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Теорема 0.2 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные

- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$
- $\exists g$ — суммируемая мажоранта:
 1. $\forall n |f_n| \leq g$ почти везде
 2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируема в силу 1, f — суммируема по следствию т. Рисса: $|f| \leq g$ почти везде

'тем более' $= |\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1. $\mu X < +\infty$ фиксируем ε $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$
 $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \rightarrow 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$

По следствию т. об абсолютной непрерывности: $\int_{X_n} 2g \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2. $\mu X = +\infty$

Проверим утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset X$ — измеримое, μA — конечная: $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$

$$\int_X g = \sup \left\{ \int g_n, 0 \leq g_n \leq g, g_n \text{ — ступенчатая} \right\}$$

$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$

— при достаточно больших n

$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} 2g$$

По 1 $\int_A |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ $\int_{X \setminus A} 2g < 2\varepsilon$

т.е. при больших n $\int_X |f_n - f| d\mu < 2\varepsilon$

□

Теорема 0.3 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- $\exists g$ — суммируемая мажоранта:
 1. $\forall n |f_n| \leq g$ почти везде
 2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

Доказательство.

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

- $0 \leq h_n \leq 2g$
- h_n — монотонно убывает
- $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде

$2g - h_n \geq 0$ — эта последовательность возрастает, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

□

Пример.

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} dt$$

Да. $t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} t^{x_0-1} e^{-t}$ при всех $t > 0$

Суммируемая мажоранта: $|t^{x-1} e^{-t}| \leq \underbrace{t^{\alpha-1} e^{-t}}_{\text{сумм.}}, 0 < \alpha < x_0$

Теорема 0.4 (Фату).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f_n \geq 0$ — измеримая
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- $c > 0 \forall n \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Замечание. Здесь не требуется чтобы $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$, это может быть не выполнено

Доказательство.

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots)$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1} \quad \lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ почти везде}$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq c$$

$$\int_X g_n \rightarrow \int_X f \Rightarrow \int_X f \leq c$$

□

Следствие 0.4.2.

- $f_n, f \geq 0$ — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \Rightarrow f$
- $\exists c > 0 \forall n \int_X f_n \leq c$

Тогда $\int_X f \leq c$

Доказательство.

$$f_n \Rightarrow f \Rightarrow \exists n_k f_{n_k} \rightarrow f \text{ почти везде}$$

□

Следствие 0.4.3.

- $f_n \geq 0$ — измеримые

Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство. Как в теореме:

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n$$

Выберем n_k :

$$\int_X f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \liminf \int_X f_n$$

Рассмотрим первое неравенство для n_k :

$$\begin{aligned} \int_X g_{n_k} &\leq \int_X f_{n_k} \\ \int_X g_{n_k} &\rightarrow \int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n \end{aligned}$$

□

1 Плотность одной меры по отношению к другой

1.1 Замена переменных в интеграле

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, \cdot)
- $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле: $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$. Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$
Тогда ν — мера:

$$\nu(\bigsqcup E_n) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_n)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом μ при отображении Φ** и

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$$

Замечание.

- $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измерима относительно \mathfrak{B}

Тогда $f \circ \Phi$ — измерима относительно \mathfrak{A} ($f \circ \Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$)

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(\underbrace{Y(f < a)}_{\in \mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}$$

Определение.

- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измерима (на X относительно \mathfrak{A})
- $\omega \geq 0$

$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

— **взвешенный образ меры μ при отображении Φ , ω — вес**

Теорема 1.1.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- (Y, \mathfrak{B}, ν)
- $\Phi : X \rightarrow Y$
- ν — взвешенный образ меры μ при отображении Φ с весом ω

- $\omega \geq 0$ — измерима на X

Тогда $\forall f$ — измеримые на Y относительно \mathfrak{B} , $f \geq 0$
 $f \circ \Phi$ — измеримая на X относительно \mathfrak{A} и

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \quad (1)$$

То же верно для суммируемых f

Доказательство. $f \circ \Phi$ — измеримая

1. Пусть $f = \chi_B, B \in \mathfrak{B}$

$$f \circ \Phi(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда 1:

$$\nu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

— это определение ν

2. f — ступенчатая. 1 следует из линейности интеграла
3. $f \geq 0$ — измеримая: теорема об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми + т. Леви

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots, h_i \text{ — ступенчатая } h_i \leq f, h_i \rightarrow f$$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_Y f d\nu \text{ для } f$$

4. f — измеримая \Rightarrow для $|f|$ выполнено 1 $\Rightarrow |f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ — суммируемы одновременно
 Берем f_+, f_- , для них интегралы конечные.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega$$

□

Следствие 1.1.4. В условиях теоремы:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f — суммируемая на B

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

Доказательство. В теорему подставить $f \leftrightarrow f \cdot \chi_B$ □

Замечание. Частный случай.

- $X = Y$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$
- $\Phi = \text{Id}$
- $\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu, \omega \geq 0$ — измеримая

В этой ситуации ω — плотность(меры ν относительно меры μ) и тогда по теореме:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x) \omega(x) d\mu$$