Лекция 4

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Плотность одной меры по отношению к другой 4

1.1 Замена перменных в интеграле 4

Теорема 0.1 (об абсолютной непрерывности интеграла)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E$ — измеримое, $\mu E < \delta \quad |\int_E f| < \varepsilon$

Следствие 0.1.1.

- f — суммируемая
- $\mu E_n \to 0$

Тогда $\int_{E_n} f \to 0$

Доказательство. Возьмем множества $X_n := X(|f| \ge n)$, очевидно что $X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$, а также $\mu(\bigcap X_n) = 0$
Утвержение: $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ — это свойство непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, тода при $\mu E < \delta$

$$\left| \int_E f \right| \le \int_E |f| \le \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}^C} |f| \le \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E_n \cap X_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \mu E \cdot n_\varepsilon \le \varepsilon$$

□

Правда ли что:

$$f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f \quad \forall \varepsilon > 0\ \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$$

эквивалентны.

(⇒) **Нет**. $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$
$f_n = \frac{1}{nx}\ f_n \underset{\lambda}{\Rightarrow} 0$
$\int |f_n - f| = +\infty$ — при всех n

(⇐) **Да**.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \le \int_{X_n} \frac{|f_n - 1|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \le \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Теорема 0.2 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные

- $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n$ $|f_n| \le g$ почти везде
  2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство. f_n — суммируема в силу 1, f — суммируема по следствию т. Рисса: $|f| \le g$ почти везде
'тем более' $= \left|\int_X f_n - \int_X f\right| \le \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$ фиксируем ε $X_n = X(|f_n - f| > \varepsilon)$
   $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \to 0$
   $$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$$
   $$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^C} \le \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^C} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$
   По следствию т. об абсолютной непрерывности: $\int_{X_n} 2g \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
2. $\mu X = +\infty$
   Проверим утверждение: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A \subset X$ — измеримое, μA — конечная: $\int_{X\setminus A} g < \varepsilon$
   $$\int_X g = \sup\{\int g_n,\ 0 \le g_n \le g,\ g_n \text{ — ступенчатая}\}$$
   $$A := \{x :\ g_n(x) > 0\}$$
   — при достаточно больших n
   $$0 \le \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X\setminus A} g < \varepsilon$$
   Фиксируем $\varepsilon > 0$
   $$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X\setminus A} \le \int_A |f_n - f| + \int_{X\setminus A} 2g$$
   По 1 $\int_A |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\int_{X\setminus A} 2g < 2\varepsilon$
   т.е. при больших n $\int_x |f_n - f| d\mu < 2\varepsilon$

□

Теорема 0.3 (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists g$ — **суммируемая мажоранта**:
  1. $\forall n$ $|f_n| \le g$ почти везде
  2. g — суммируемая везде

Тогда f_n, f — суммируемые и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, и 'тем более' $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Доказательство.
$$h_n := \sup(|f_n - f|,\ |f_{n+1} - f|,\ \dots)$$

- $0 \le h_n \le 2g$
- h_n — монотонно убывает
- $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде

$2g - h_n \geq 0$ — эта последовательность возрастает, $2g - h_n \to 2g$ почти везде

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \to 0$$

□

Пример.

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$\lim_{x\to x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1}e^{-t}dt$$

Да. $t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow[x\to x_0]{} t^{x_0-1}e^{-t}$ при всех $t > 0$

Суммируемая мажоранта: $|t^{x-1}e^{-t}| \leq \underbrace{t^{\alpha-1}e^{-t}}_{\text{сумм.}}$, $0 < \alpha < x_0$

Теорема 0.4 (Фату)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n \geq 0$ — измеримая
- $f_n \to f$ почти везде
- $c > 0$ $\forall n$ $\int_X f_n \leq c$

<u>Тогда</u> $\int_X f \leq c$

Примечание. Здесь не требуется чтобы $\int_X f_n \to \int_X f$, это может быть не выполнено

Доказательство.

$$g_n := \inf(f_n,\ f_{n+1},\ \dots)$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1}\ \lim g_n = \underline{\lim} f_n = f \text{ почти везде}$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq c$$

$$\int_X g_n \to \int_X f \Rightarrow \int_X f \leq c$$

□

Следствие 0.4.2.

- $f_n, f \geq 0$ — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \Rightarrow f$
- $\exists c > 0$ $\forall n \int_X f_n \leq c$

<u>Тогда</u> $\int_X f \leq c$

Доказательство.

$$f_n \Rightarrow f \Rightarrow \exists n_k\ f_{n_k} \to f \text{ почти везде}$$

□

Следствие 0.4.3.

- $f_n \geq 0$ — измеримые

<u>Тогда</u>

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство. Как в теореме:

$$\int_X g_n \le \int_X f_n$$

Выберем n_k:

$$\int_X f_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Рассмотрим первое неравенство для n_k:

$$\int_X g_{n_k} \le \int_X f_{n_k}$$

$$\int_X g_{n_k} \to \int_X \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int_X f_n$$

□

1 Плотность одной меры по отношению к другой

1.1 Замена перменных в интеграле

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \cdot)$
- $\Phi : X \to Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле: $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$. Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$
Тогда ν — мера:

$$\nu(\bigsqcup E_n) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E)n) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_n) = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом** μ **при отображении** Φ и

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$$

Примечание.

- $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима относительно $\mathfrak{B}$

Тогда $f \circ \Phi$ — измерима относитльно $\mathfrak{A}$ ($f \circ \Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$)

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(\underbrace{Y(f < a)}_{\in \mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}$$

Определение.

- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима(на X относительно $\mathfrak{A}$)
- $\omega \ge 0$

$$\forall B \in \mathfrak{B} \ \nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

— **взвешенный образ меры** μ при отображении Φ, ω — **вес**

Теорема 1.1.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\Phi : X \to Y$
- ν — взвешенный образ меры μ при отображении Φ с весом ω

- $\omega \geq 0$ — измерима на X

Тогда $\forall f$ — измеримые на Y относительно $\mathfrak{B}$, $f \geq 0$
$f \circ \Phi$ — измеримая на X относительно $\mathfrak{A}$ и

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x)\, d\mu(x) \tag{1}$$

То же верно для суммируемых f

Доказательство. $f \circ \Phi$ — измеримая

1. Пусть $f = \mathcal{X}_B, B \in \mathfrak{B}$

$$f \circ \Phi(x) = f(\Phi(x)) = \left[\begin{array}{ll} 1 & ,\Phi(x) \in B \\ 0 & ,\Phi(x) \notin B \end{array}\right. = \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)}$$

   Тогда 1:

$$\nu B \stackrel{?}{=} \int_X \mathcal{X}_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

   — это определение ν

2. f — ступенчатая. 1 следует из линейности интеграла
3. $f \geq 0$ — измеримая: теорема об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми + т. Леви

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots,\ h_i \text{ — ступенчатая } h_i \leq f\ h_i \to f$$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow[i \to \infty]{} 1 \text{ для } f$$

4. f — измеримая $\Rightarrow$ для $|f|$ выполнено 1 $\Rightarrow$ $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ — суммируемы одновременно
   Берем f_+, f_-, для них интегралы конечные.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega$$

□

Следствие 1.1.4. В условиях теоремы:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f — суммируемая на B

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

Доказательство. В теорему подставить $f \leftrightarrow f \cdot \mathcal{X}_B$ □

Примечание. Частный случай.

- $X = Y$
- $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$
- $\Phi = \mathrm{Id}$
- $\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$, $\omega \geq 0$ — измеримая

В этой ситуации ω — плотность(меры ν относительно меры μ) и тогда по теореме:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x) \omega(x) d\mu$$