Лекция 3

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1 Интеграл

Определение.

1.

   - $f \geq 0$, ступенчатые
   - $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{E_k}$, E_k — измеримое

$$\int_X f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. • $f \geq 0$, измеримая

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ — ступ.}}} \int_X g d\mu$$

3. • f — измерима
   - $f^+, f^- \geq 0$ — измеримые

   Пусть $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ — конечные
   Тогда $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$
   Если $\int_X f^+$, $\int_X f^-$ — оба конечные, то f называется **суммируемой**

   Замечание. f — измеримая, ≥ 0, интеграл 3 = интеграл 2

4.

   - $E \subset X$ — измеримое
   - f — измерима на X

$$\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E$$

Замечание.
$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \quad \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$$

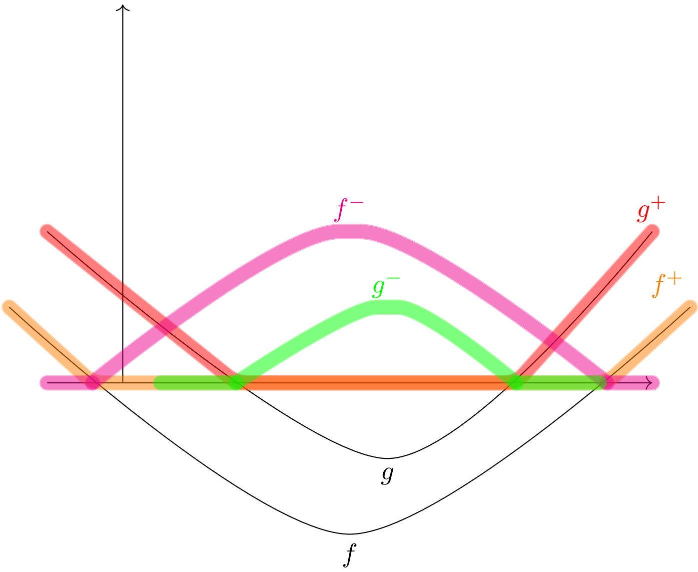
Замечание.
$$\int_E f d\mu = \sup\{fg : \ 0 \leq g \leq f \text{ на } E, g \text{ — ступенчатые}\}$$
, можно считать что g — тождественный 0 вне множества E

Замечание. $\int_E f$ не зависит от значений f вне E

Замечание. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $E \subset X$ — измеримое, g, f — измеримые. Свойства:

1. Монотонность $f \le g$ $\int_E f \le \int_E g$

   Доказательство.

   (a) $f, g \ge 0$ — очевидно

   (b) f, g — произвольные
   $f^+ \le g^+$ $f^- \ge g^-$
   $\int_E f^+ \le \int_E g^+$ $\int_E f^- \ge \int_E g^- \Rightarrow$ OK

   ☐

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E; \int_E 0 d\mu = 0$

3. $\mu E = 0$ $\int_E f = 0$

   Доказательство.

   (a) f — ступенчатая

   (b) $f \ge 0$ — измеримая

   ☐

   Замечание:
   f — измеримая. Тогда f — суммируемая $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

   ($\Leftarrow$) следует из свойства 1. $f^+, f^- \le |f|$

   ($\Rightarrow$) позже

4. $\int_E (-f) = -\int_E f$, $\forall c \in \mathbb{R}$ $\int_E cf = c\int_E f$

   Доказательство.

   (a) $(-f)^+ = f^-$ $(-f)^- = f^+$

   (b) можно считать $c > 0$ для $f \ge 0$ — тривиально

   ☐

5. $\exists \int_E f d\mu$
   Тогда $|\int_E f d\mu| \le \int_E |f| d\mu$

   Доказательство. $-|f| \le f \le |f|$. По свойствам 1 и 4 ☐

6. $\mu E \le +\infty,\ a \le f \le b$
   Тогда $a\mu E \le \int_E f \le b\mu E$

   Доказательство. $a\chi_E \le f \le b\chi_E$, тривиально □

   Следствие 1.0.1. f — измерима на E, f — ограничена на E, $\mu E < +\infty$
   Тогда f — суммируемая на E

7. f — суммируемая на E. Тогда f — почти везде конечная

   Доказательство.

   (a) $f \ge 0$ $f = +\infty$ на $A \subset E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_E f \ge n\mu A$
   (b) $f = f^+ - f^-$

   □

Лемма 1.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

— измеримые, g — ступенчатая, $g \ge 0$
Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\int_A g d\mu = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) = \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\ge 0} = \sum_i \sum_k \dots = \sum_i \int_{A_i} g d\mu$$

□

Теорема 1.1.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая на A
- $f \ge 0$

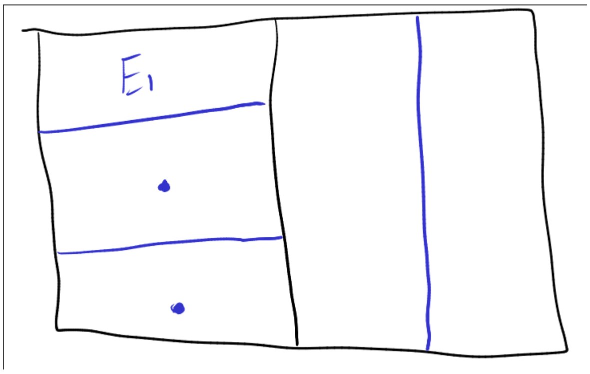
Тогда $\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$

Доказательство.

($\le$) ступенчатая $g :\ 0 \le g \le f$ $\int_A g = \sum \int_{A_i} g d\mu \le \sum \int_{A_i} f$ — по Лемме

($\ge$) 1. $A = A_1 \cup A_2$
$0 \le g_1 \le f\chi_{A_1}$ $0 \le g_2 \le f\chi_{A2}$, g_1, g_2 — ступенчатые

$$g_1 = \sum \alpha_k \chi_{E_k}\ g_2 = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$



Считаем что E_k – совместное разбиение

$$0 \le g_1 + g_2 \le f\chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2 \le \int_A f$$

Перейдем к супремуму интегралов g_1, g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \le \int_A f$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ — индукция по n
3. $$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \sqcup B_n$$

   , где

   $$B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$$

   $$\int_A f = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \ge \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f$$

□

Следствие 1.1.2.

- $f \ge 0$ — измеримая
- $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$
- $\nu E := \int_E f d\mu$

Тогда ν — мера

Следствие 1.1.3 (аддитивности интеграла). f — суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримые
Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. Объединяем два сходящихся ряда для f^+ и f^- □

1.1 Предельный переход под знаком интеграла

$f_n \to f$. Можно ли утверждать $\int_E f_n \to \int_E f$?
Пример. $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$ $f \equiv 0$ $f_n \to f$ (даже $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$)

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 1.2 (Леви)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, f_n — измеримая
- $\forall n$ $0 \le f_n \le f_{n+1}$ почти везде
- $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ почти везде

Тогда $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Замечание. f — задана всюду, кроме множества меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e
Тогда f — измерима на X.

Доказательство.

($\leq$) очевидно. $f_n \leq f$ почти везде $\int f_n \leq \int f$

$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \int_e f_n = \int_{X\setminus e} f_n \leq \int_{X\setminus e} f \leq \int_X f$$

($\geq$) Достаточно $\forall g$ — ступенчатая $0 \leq g \leq f$

$$\lim \int_X f_n \geq \int_X g$$

Достаточно $\forall c \in (0,1)$

$$\lim \int_X f_n \geq c \int_X g$$

$$E_n := X(f_n \leq cg) \quad \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$ т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \int_X g$
Последнее равентсво справедливо в силу непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

□

Теорема 1.3. $f, g \geq 0$ измеримы на E
Тогда

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k},\ g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $f_n :\ 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots\ \lim f_n = f$
$g \geq 0$ — измерима $\Rightarrow \exists$ ступенчатая $g_n :\ 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots\ \lim g_n = g$

$$f_n + g_n \to f + g \quad \int_E f_n + g_n \to \int_E f + g$$

$$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_E g = \int_E f + g$$

□

Следствие 1.3.4. f, g — суммируемы на E
Тогда $f + g$ — суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Замечание. Свойство 3 доказано

Доказательство. Суммируемость $|f + g| \leq |f| + |g|$
$h = f + g$. Тогда:

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Leftrightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

$$\Rightarrow \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+$$

$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

$$\int_E h = \int_E f + \int_E g$$

□

Определение. $\mathcal{L}(X)$ — **множество функций суммируемых на X**

Следствие 1.3.5. $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ — это линейный функционал на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X)$ $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X); \ \int_X \sum \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_X f_k$$

Теорема 1.4 (об интегрировании положительных рядов)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая
- $u_n \geq 0$ почти везде

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. по т. Леви: $S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$
$0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$ $S_n \to S$ — сумма ряда $\sum u_n$
Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$

$$\int_E S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k \to \int_E S$$

□

Следствие 1.4.6. u_n — измеримые $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$
Тогда ряд $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходится при почти всех x

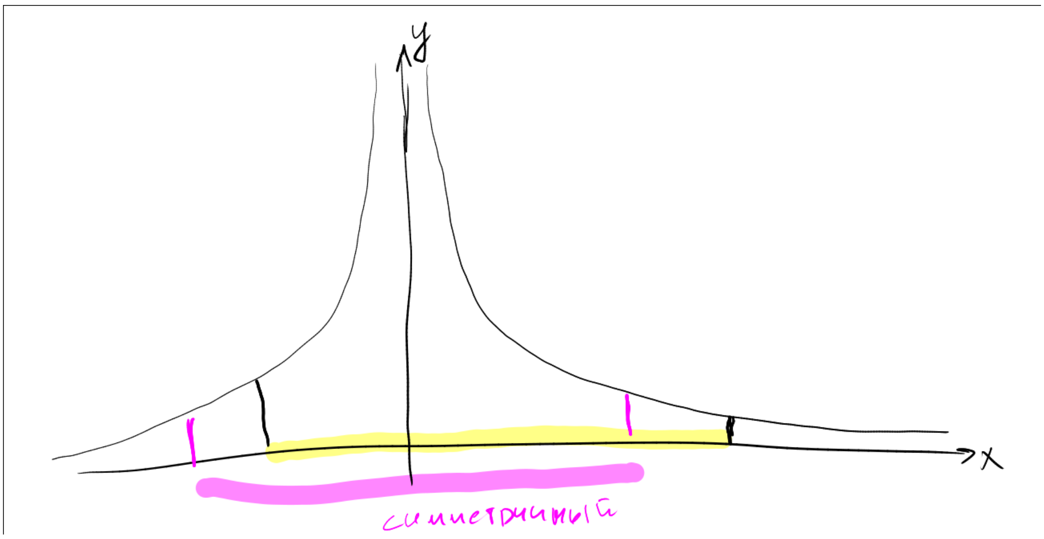
Доказательство. $S(x) := \sum |u_n(x)| \geq 0$ — измеримая

$$\int_E S(x) = \sum \int_E |u_n| < +\infty$$

$\Rightarrow S$ — суммируема $\Rightarrow S$ почти везде конечна □

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произведение последовательности; $\sum a_n$ — абсолютно сходится
Тогда $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде



$$\int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} = \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} dx = |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

$$\leq |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{N} \cdot |a_n|$$

$$\sum_n \int_{[-N,N]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq 4 \int_N \sum |a_n| < +\infty$$

$\square$