

Лекция 2

Луа Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1	Теория меры	1
1.1	Измеримые функции	1
1.2	Сходимость почти везде и по мере	3
2	Интеграл	6

1 Теория меры

1.1 Измеримые функции

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измерима
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad X(f < a) \in \mathfrak{A}$
- $\mathcal{X}_E = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$

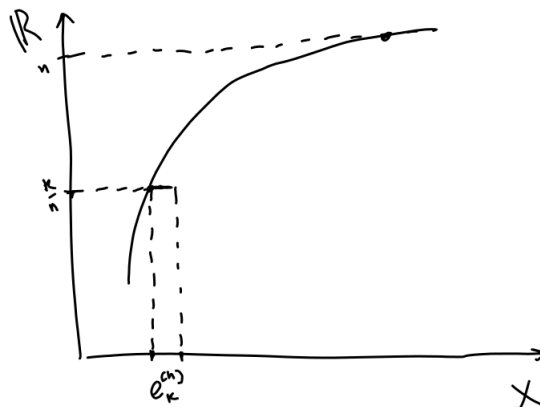
Теорема 1.1 (характеризация измеримых функции с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2. $\forall x f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Доказательство.



$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f \leq \frac{k}{n}\right) \quad k = 1, \dots, n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

Следствие 1.1.1. f — измерима

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатая, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Следствие 1.1.2. f, g — измеримы

Тогда fg — измерима ($0 \cdot \infty = 0$)

Доказательство.

- $f_n \rightarrow f$
- $g_n \rightarrow g$
- f_n, g_n — ступенчатые

$f_n g_n$ — ступенчатая $f_n g_n \rightarrow fg$

□

Следствие 1.1.3. f, g — измеримы

Тогда $f + g$ — измерима

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ $g_n \rightarrow g$, (f_n, g_n) — ступенчатые

$f_n + g_n$ — ступенчатая $f_n + g_n \rightarrow f + g$

Считаем что $\forall x$, не может быть $f(x) = \pm\infty$, $g(x) = \mp\infty$

□

- $A \subset X$
- A — полная мера
- $\mu(X \setminus A) = 0$

Теорема 1.2 (об измеримости непрерывной на множестве полной меры).

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывна на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измерима

Доказательство. f — измерима на E'

$E'(f < a)$ — открыто в E'

$$\left. \begin{array}{l} e(f < a) \subset e \\ \lambda_m \text{ — полная} \end{array} \right\} \Rightarrow e(f < a) \text{ — измерима в } E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

Пример.

- $E = \mathbb{R}$
- $f = \chi_{\mathbb{Irr}}$

Следствие 1.2.4.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $E' = E \setminus e$
- f — измерима на E'

Тогда можно так переопределить f на множестве e , что полученная функция \tilde{f} будет измерима на E

Доказательство. Пусть:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in E \\ \text{const} & , x \in e \end{cases}$$

$$E(\tilde{f} < a) = E'(f < a) \cup e(\tilde{f} < a)$$

□

Следствие 1.2.5. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонна

Тогда f — измерима

Доказательство. f — непрерывна на $\langle a, b \rangle$ за исключением возможно счетного числа точек

□

1.2 Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание ($x \in X$)

$W(x)$ — верное **при почти всех** $x \in E$

= **почти всюду** на E

= **почти везде** на E

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

Пример. $x = \mathbb{R}$, x — иррационально

Пример. $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ при почти всех $x \in E$

$\exists e, \mu e = 0$, при $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

Замечание. Свойства:

1.
 - μ — полная
 - $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 - $f_n(x) \rightarrow f(x)$ почти везде на X
 - f_n — измерима

Тогда f — измерима

Доказательство. $f_n \rightarrow f$ на X' , где $e = X \setminus X'$, $\mu e = 0$

f — измерима на X'

μ — полная $\Rightarrow f$ — измерима на X

$$X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup e(f < a)$$

□

2. В условии п. 1

Можно переопределить f на e . Получится \hat{f}

$f_n(x) \rightarrow \hat{f}(x)$ почти везде

\hat{f} — измерима

Определение. $f = g$ почти везде

Будем говорить что f и g эквивалентны

3. Пусть $\forall n W_n(x)$ — истинно при почти всех x

Тогда утверждение “ $\forall n W_n(x)$ — истинно” — верно при почти всех x

Это высказывание верно при

$$x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right) \quad \mu \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right) = 0$$

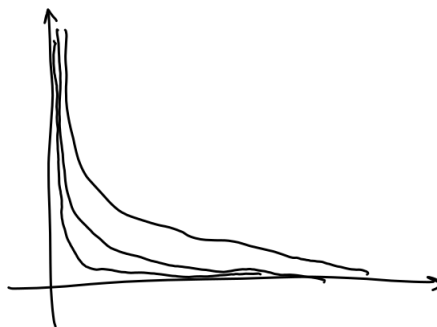
Определение.

- $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечные
- f_n сходится к f по мере
- $f_n \xrightarrow[\mu]{\Rightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Замечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0

Т.е. предел не задан однозначно

Пример.



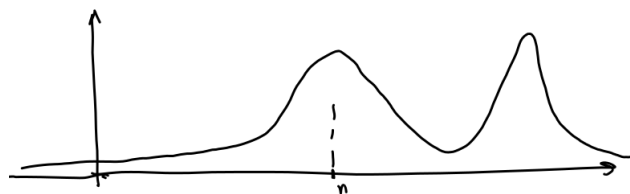
$$f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0$$

$$X \mathbb{R}_+ \lambda$$

$$f_n \rightarrow f \text{ всюду на } (0, +\infty)$$

$$f_n \xrightarrow[\lambda]{\Rightarrow} f$$

Пример.



$$f_n(x) := e^{-(n-x)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ при всех } x$$

$$f_n(x) \rightarrow 0$$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

, при $0 < \varepsilon < 1$

Пример. $n = 2^k + e, 0 \leq e < 2^k$

$X = [0, 1]$ λ

$f_n(x) := \chi_{[\frac{e}{2^k}, \frac{e+1}{2^k}]}$

$\lim f_n(x)$ — не существует ни при каких x

$$\lambda X(f_n > \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$f_n \xrightarrow{\lambda} 0$$

Теорема 1.3 (Лебега).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightarrow f$ почти везде
- μX — конечна

Тогда $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду Частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0 (т.е. $f \equiv 0$)

$$\left. \begin{aligned} X(|f_n| \geq \varepsilon) &= X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) &= \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывности меры сверху}$$

Общий случай: $f_n \rightarrow f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда $\varphi_n \rightarrow 0$, монотонна

$$\begin{aligned} X(|f_n - f| \geq \varepsilon) &\subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) &\leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 1.4 (Рисс).

- (X, \mathfrak{A}, μ)
- f_n, f — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Тогда $\exists n_k f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде

Доказательство. $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \rightarrow 0$

$\exists n_k$: при $n > n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$

можно считать: $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$\begin{aligned} E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k &\leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0 \\ \mu E_k &\rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0 \end{aligned}$$

При $x \notin E$ $f_{n_k} \rightarrow f$

$$x \notin E \exists N x \notin E_k$$

при $k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, т.е. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$

□

Следствие 1.4.6.

- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$
- $|f_n| \leq g$ почти везде

Тогда $|f| \leq g$ почти везде

Доказательство. $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде □

Теорема 1.5 (Егорова).

- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \rightarrow f$ почти везде

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists e \subset X, \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightarrow f$ на $X \setminus e$

2 Интеграл

(X, \mathfrak{A}, μ)

Определение.

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- E_k — дополнительное разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu := \sum \alpha_k \mu E_k$$

, считаем $0 \cdot +\infty = 0$

Замечание. Свойства:

1. Не зависит от представления f в виде суммы

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2. $f \leq g \quad \int f \leq \int g, f, g$ — ступенчатые

Определение. $f \geq 0$ — измерима

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Замечание. Свойства:

1. Если f — ступенчатая то **Опр. 2** = **Опр. 1**
2. $0 \leq \int f \leq +\infty$
3. $g \leq f, f$ — измерима, g — ступенчатая $\Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

Определение.

- f — измерима
- $\int_X f^+$ или $\int_x f^-$ конечный

Тогда

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Теорема 2.1 (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$ — измерима
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Тогда

1. при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ — измерима на \mathbb{R}^n

2. функция

$$x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$$

— измеримая

3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Обозначение. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$

