

# Лекция 2

Луа Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Теория меры</b>	<b>1</b>
1.1	Измеримые функции	1
1.2	Сходимость почти везде и по мере	3
<b>2</b>	<b>Интеграл</b>	<b>6</b>

## 1 Теория меры

### 1.1 Измеримые функции

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad X(f < a) \in \mathfrak{A}$
- $\mathcal{X}_E = \sum \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$

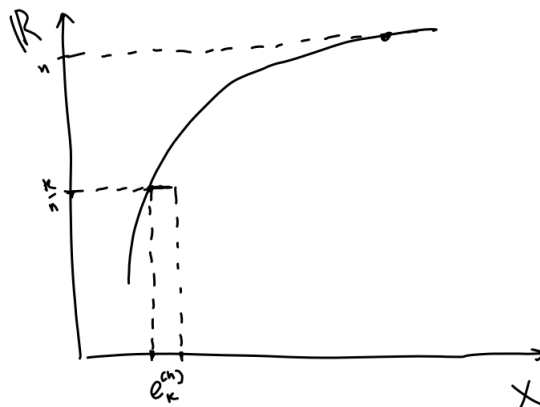
**Теорема 1.1** (характеризация измеримых функции с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- $f$  — измерима

Тогда  $\exists f_n$  — ступенчатые

1.  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$
2.  $\forall x f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

*Доказательство.*



$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f \leq \frac{k}{n}\right) \quad k = 1, \dots, n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} = X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} \mathcal{X}_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x)$$

□

*Следствие 1.1.1.*  $f$  — измерима

Тогда  $\exists f_n$  — ступенчатая,  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  всюду и  $|f_n| \leq |f|$

*Следствие 1.1.2.*  $f, g$  — измеримы

Тогда  $fg$  — измерима ( $0 \cdot \infty = 0$ )

*Доказательство.*

- $f_n \rightarrow f$
- $g_n \rightarrow g$
- $f_n, g_n$  — ступенчатые

$f_n g_n$  — ступенчатая  $f_n g_n \rightarrow fg$

□

*Следствие 1.1.3.*  $f, g$  — измеримы

Тогда  $f + g$  — измерима

*Доказательство.*  $f_n \rightarrow f$   $g_n \rightarrow g$ ,  $(f_n, g_n)$  — ступенчатые

$f_n + g_n$  — ступенчатая  $f_n + g_n \rightarrow f + g$

Считаем что  $\forall x$ , не может быть  $f(x) = \pm\infty$ ,  $g(x) = \mp\infty$

□

- $A \subset X$
- $A$  — полная мера
- $\mu(X \setminus A) = 0$

**Теорема 1.2** (об измеримости непрерывной на множестве полной меры).

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- $f$  — непрерывна на  $E' = E \setminus e$

Тогда  $f$  — измерима

*Доказательство.*  $f$  — измерима на  $E'$

$E'(f < a)$  — открыто в  $E'$

$$\left. \begin{array}{l} e(f < a) \subset e \\ \lambda_m \text{ — полная} \end{array} \right\} \Rightarrow e(f < a) \text{ — измерима в } E$$

$$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$$

□

*Пример.*

- $E = \mathbb{R}$
- $f = \mathcal{X}_{\mathbb{Irr}}$

Следствие 1.2.4.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $E' = E \setminus e$
- $f$  — измерима на  $E'$

Тогда можно так переопределить  $f$  на множестве  $e$ , что полученная функция  $\tilde{f}$  будет измерима на  $E$

Доказательство. Пусть:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in E' \\ const & , x \in e \end{cases}$$

$$E(\tilde{f} < a) = E'(\tilde{f} < a) \cup e(\tilde{f} < a)$$

□

Следствие 1.2.5.  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — монотонна

Тогда  $f$  — измерима

Доказательство.  $f$  — непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  за исключением возможно счетного числа точек

□

## 1.2 Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$  — высказывание ( $x \in X$ )

$W(x)$  — верное **при почти всех**  $x \in E$

= **почти всюду** на  $E$

= **почти везде** на  $E$

$\exists e \subset E \quad \mu e = 0 \quad W(x)$  — истинно при  $x \in E \setminus e$

Пример.  $x = \mathbb{R}$ ,  $x$  — иррационально

Пример.  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$  при почти всех  $x \in E$

$\exists e, \mu e = 0$ , при  $x \in E \setminus e \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

Примечание. Свойства:

1.
  - $\mu$  — полная
  - $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
  - $f_n(x) \rightarrow f(x)$  почти везде на  $X$
  - $f_n$  — измерима

Тогда  $f$  — измерима

Доказательство.  $f_n \rightarrow f$  на  $X'$ , где  $e = X \setminus X'$ ,  $\mu e = 0$

$f$  — измерима на  $X'$

$\mu$  — полная  $\Rightarrow f$  — измерима на  $X$

$$X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup e(f < a)$$

□

2. В условии п. 1

Можно переопределить  $f$  на  $e$ . Получится  $\hat{f}$

$f_n(x) \rightarrow \hat{f}(x)$  почти везде

$\hat{f}$  — измерима

*Определение.*  $f = g$  почти везде

Будем говорить что  $f$  и  $g$  эквивалентны

3. Пусть  $\forall n W_n(x)$  — истинно при почти всех  $x$

Тогда утверждение “ $\forall n W_n(x)$  — истинно” — верно при почти всех  $x$

Это высказывание верно при

$$x \in X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right) \quad \mu \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right) = 0$$

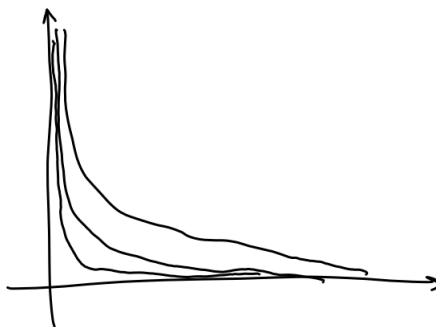
**Определение.**

- $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — почти везде конечные
- $f_n$  сходится к  $f$  по мере
- $f_n \xrightarrow[\mu]{\Rightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

*Примечание.*  $f_n$  и  $f$  можно изменить на множестве меры 0

Т.е. предел не задан однозначно

*Пример.*



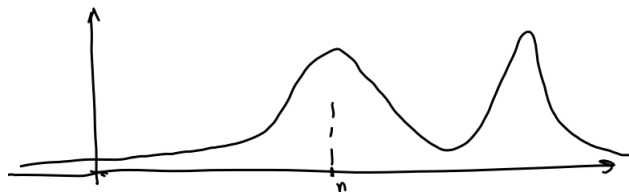
$$f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0$$

$$X \mathbb{R}_+ \lambda$$

$$f_n \rightarrow f \text{ всюду на } (0, +\infty)$$

$$f_n \xrightarrow[\lambda]{\Rightarrow} f$$

*Пример.*



$$f_n(x) := e^{-(n-x)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ при всех } x$$

$$f_n(x) \rightarrow 0$$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

, при  $0 < \varepsilon < 1$

Пример.  $n = 2^k + e, 0 \leq e < 2^k$

$X = [0, 1]$   $\lambda$

$f_n(x) := \chi_{[\frac{e}{2^k}, \frac{e+1}{2^k}]}$

$\lim f_n(x)$  — не существует ни при каких  $x$

$$\lambda X(f_n > \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$f_n \xrightarrow{\lambda} 0$$

**Теорема 1.3** (Лебега).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n, f$  — измеримые, почти везде конечные
- $f_n \rightarrow f$  почти везде
- $\mu X$  — конечна

Тогда  $f_n \xrightarrow{\mu} f$

*Доказательство.* Переопределим  $f_n, f$  на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду Частный случай:  $\forall x$  последовательность  $f_n(x)$  монотонно убывает к 0 (т.е.  $f \equiv 0$ )

$$\left. \begin{aligned} X(|f_n| \geq \varepsilon) &= X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon) \\ \bigcap X(f_n \geq \varepsilon) &= \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Теорема о непрерывности меры сверху}$$

Общий случай:  $f_n \rightarrow f$

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

Тогда  $\varphi_n \rightarrow 0$ , монотонна

$$\begin{aligned} X(|f_n - f| \geq \varepsilon) &\subset X(\varphi_n \geq \varepsilon) \\ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) &\leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 1.4** (Рисс).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n, f$  — измеримы почти везде, конечны
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Тогда  $\exists n_k f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде

*Доказательство.*  $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \rightarrow 0$

$\exists n_k$ : при  $n > n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$

можно считать:  $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде

$$E_k := \bigcup_{i=k}^{+\infty} X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) \quad E = \bigcap E_i$$

$$\begin{aligned} E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k &\leq \sum_{i=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_i} - f| \geq \frac{1}{i}) < \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0 \\ \mu E_k &\rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0 \end{aligned}$$

При  $x \notin E$   $f_{n_k} \rightarrow f$

$$x \notin E \exists N x \notin E_k$$

при  $k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ , т.е.  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$

□

*Следствие 1.4.6.*

- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$
- $|f_n| \leq g$  почти везде

Тогда  $|f| \leq g$  почти везде

*Доказательство.*  $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде □

**Теорема 1.5** (Егорова).

- $\mu X < +\infty$
- $f_n, f$  — почти везде конечны, измеримы
- $f_n \rightarrow f$  почти везде

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists e \subset X, \mu e < \varepsilon \quad f_n \rightarrow f$  на  $X \setminus e$

## 2 Интеграл

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$

**Определение.**

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- $E_k$  — дополнительное разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu := \sum \alpha_k \mu E_k$$

, считаем  $0 \cdot +\infty = 0$

*Примечание.* Свойства:

1. Не зависит от представления  $f$  в виде суммы

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k$$

2.  $f \leq g \implies \int f \leq \int g$ ,  $f, g$  — ступенчатые

**Определение.**  $f \geq 0$  — измерима

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

*Примечание.* Свойства:

1. Если  $f$  — ступенчатая то **Опр. 2** = **Опр. 1**
2.  $0 \leq \int f \leq +\infty$
3.  $g \leq f$ ,  $f$  — измерима,  $g$  — ступенчатая  $\implies \int_X g \leq \int_X f$

**Определение.**

- $f$  — измерима
- $\int_X f^+$  или  $\int_X f^-$  конечный

Тогда

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

**Теорема 2.1** (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$  — измерима
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Тогда

1. при почти всех  $x \in \mathbb{R}^m$  функция  $y \mapsto f(x, y)$  — измерима на  $\mathbb{R}^n$

2. функция

$$x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$$

— измеримая

3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

**Обозначение.**  $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$

