

Лекция 14

Пуа Yaroshevskiy

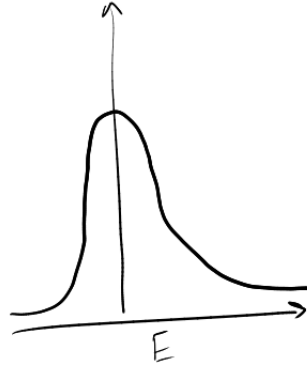
13 мая 2023 г.

Содержание

1 Суммирование рядов Фурье	3
1.1 Метод средних арифметических	3
$f, g \in L^1[-\pi, \pi]$	

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt$$

Пример. g :



f — непрерывна
 $(f * g) \approx f$

$$g = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} g = 1$$

$$\delta_0 : \mu\{0\} = 1 \quad \mu(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$$

$$\mu E = \int_E g dx$$

Обозначение. $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta] = E_\delta$

Определение. Аппроксимативная единица

- $D \subset \mathbb{R}$
- h_0 — предельная точка в $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$ — называется аппроксимативной единицей

AE1 $\forall h \in D, K_h \in L^1[-\pi, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

AE2 L_1 — нормы функций K_h ограничены в совокупности

$$\exists M \forall h \int_{[-\pi, \pi]} |K_h| \leq M$$

AE3 $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h| dx \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

Примечание. $K_h \geq 0 \forall h$

Тогда АЕ1 \Leftrightarrow АЕ2

Примечание.

АЕЗ' $K_h \in L^\infty[-\pi, \pi]$ и $\forall \delta \in (0; \pi)$

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

Лемма 1. $АЕЗ' \Leftrightarrow АЕЗ$

Определение. АЕ1 + АЕ2 + АЕЗ' = усиленная аппроксимативная единица

Теорема 0.1. K_h — а.е.

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \implies f * K_h \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{[-\pi, \pi]} f$
2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \implies \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$
3. K_h — усиленная а.е. $f \in L^1[-\pi, \pi]$, f — непрерывная в x
Тогда
 - $f * K_h$ — непрерывна в x
 - $f * K_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} f(x)$

Доказательство.

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt$$

M — из АЕ2

1. $\varepsilon > 0$, f — равномерно непрерывна

$$\exists \delta > 0 \forall t, |t| < \delta \forall x |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$|f * K_h(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)| dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0 \xrightarrow{\text{АЕЗ}} \exists V(h_0) \forall h \in V(h_0) I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. $f \in L^1$, $K_h \in L^\infty \implies f * K_h$ — непрерывна

Для данного x проверим утверждение $\varepsilon > 0$; $I_1 + I_2 < \varepsilon$; $\exists V(h_0) \forall h \in V(h_0)$
 f — непрерывна в x

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, |t| < \delta |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)| dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)| dt \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0 \end{aligned}$$

, т.е. $\exists V(h_0) \forall h \in V(h_0) I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$

2.

$$\begin{aligned} \|f * K_h - f\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h dt \right| dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)| dx dt = \\ &= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt \end{aligned}$$

, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|$ — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$= \|K_h\|_1 \left(g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|} \right) (0)$$

— по п.1 $g(0) = 0$

□

Примечание. Модификация п. 2

$$f \in L^p[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

Примечание. Модификация п. 3

$$f \in L^1 \quad \exists f(x-0), f(x+0)$$

K_h — усиленная а.е. $\forall h$ K_h — четная

Тогда

$$(f * K_h)(x) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x_0+0))$$

1 Суммирование рядов Фурье

1.1 Метод средних арифметических

Определение.

$$\begin{aligned} \sum a_n \quad S_n &:= \sum_{k=0}^n a_k \\ \sigma_n &:= \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \dots + S_n) \\ \sum a_n &\stackrel{\text{сред. арифм.}}{=} S \end{aligned}$$

, если $\sigma_n \rightarrow S$

Теорема 1.1.

$$\sum a_n = S \implies \sum a_n \stackrel{\text{с.а.}}{=} S$$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N, |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned} |\sigma_n - S| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k - S) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^n |S_k - S|}{n+1} \end{aligned}$$

$\exists N \forall n > N$ эта дробь $< \frac{\varepsilon}{2}$

□

Определение. $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k(f)$$

— суммы Фейера

Примечание.

$$S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt$$

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t) dt$$

, где $\Phi_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + \dots + D_n) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}$ — **ядро Фейера**

Теорема 1.2 (Фейера).

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$

Тогда $\sigma_n(f) \xrightarrow{[-\pi, \pi]} f$

2. $f \in L^p[-\pi, \pi] \implies \|\sigma_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$

3. $f \in L^1, f$ — непрерывна в $x \implies \sigma_n(f, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

Доказательство. Проверим: Φ_n — усиленная а.е. и тогда 1-3 следуют из свойства а.е.

АЕ1 $\Phi_n \in L^1$, т.к. Φ_n — непрерывная (и даже $\Phi_n \in L^\infty$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$$

АЕ2 следует из АЕ1, поскольку $\Phi_n \geq 0$

АЕ3 $t \in E_\delta$

$$0 \leq \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

Примечание. в п.2 $p = 1$ — свойство а.е. было доказано, $p > 1$ — без доказательства

Следствие 1.2.1. $f \in L^1[-\pi, \pi]$ — непрерывна в x . Если ряд Фурье f сходится в точке x

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) \text{ — конечный}$$

, то $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$

Доказательство.

$$\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

и по теореме Коши

□

Следствие 1.2.2.

1. Тригонометрическая система полна в $L^2[-\pi, \pi]$

2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \forall k a_k(f) = 0, b_k(f) = 0$ либо $\forall k \in \mathbb{Z} C_k(f) = 0$

Тогда $f = 0$ почти везде

Доказательство.

1. Следствие из 2.: $\forall k f \perp \cos kx$ и $f \perp \sin kx$

$$0 = \langle f, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx = \pi a_k(f)$$

, т.е. $a_k = 0$

2. $S_n(f) = 0$ почти везде, $\sigma_n(f) = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде

□

Следствие 1.2.3. $f \in L^2[-\pi, \pi]$

Тогда ряд Фурье f сходится к f в L^2 :

$$S_n(f) \rightarrow f \text{ в } L^2 \quad \|S_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0$$

— общее свойство базиса

Следствие 1.2.4. $f \in L^1[0, \pi]$. Коэффициенты f по системе $\{\cos kx\}$ равно 0

Тогда $f = 0$ почти везде

Аналогично для $\{\sin kx\}$

Следствие 1.2.5 (теорема Вейерштрасса). Тригонометрический полином плотный в $L^p[-\pi, \pi]$ и $C[-\pi, \pi]$, $1 \leq p < +\infty$

Следствие 1.2.6. $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ Тогда выполняются равенства Парсеваля:

1.

$$\int_{[pi, \pi]} f \bar{g} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \overline{c_k(g)}$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi \sum |c_k(f)|^2$$

3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} fg = \pi \left(\frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g) \right)$$

4.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi \left(\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right)$$

Лемма 2. $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$ — ядро Дирихле

Тогда $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$\left| \int_0^x D_n(t) \right| < 2$$

Примечание. D_n — не является а.е. — не выполняется АЕ2

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n \asymp \ln n$$

Теорема 1.3. $f \in L^1[-\pi, \pi]$

Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx$$

Примечание. ряд Фурье при этом может расходиться в том числе всюду

Доказательство. Достаточно доказать: $-\pi \leq a < b \leq \pi$, $\chi = \chi_{[a,b]}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx &= \sum \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \cdot 2\pi c_{-k}(\chi) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot S_n(\chi, t) dt \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \chi = \int_a^b f \\ S_n(\chi, t) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \chi(t) \end{aligned}$$

при $t \in [-\pi, \pi]$, $t \neq a, b$ по признаку Дини

$$S_n(\chi, t) = \int \chi \cdot D_n = \int_a^b D_n(x-t) = \int_0^{b-t} D_n(x) dx - \int_0^{a-t} D_n(x)$$

по лемме $|S_n(x, t)| \leq 4$. Таким образом

$$f \cdot S_n \rightarrow f \cdot \chi \text{ — почти везде}$$

$$|f \cdot S_n| \leq \underbrace{4 \cdot |f|}_{\text{сумм.}}$$

Работает условие теоремы Лебега. □

Теорема 1.4 (о ‘слабой’ сходимости рядов Фурье). $f \in L^1[-\pi, \pi] \forall u \in \tilde{C}^1[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x) \cdot u(x) dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)u(x) dx$$

Доказательство.

1. $f \in L^1$ u — непрерывна $\implies u \in L^\infty \implies f * u$ — непрерывная и даже гладкая

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f * u)(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(x-t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u'_x(x-t) dt \end{aligned}$$

— обобщенный предел Лейбница

2.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x)u(x) dx &= \sum_{k=-n}^n c_k(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} u(x) dx \stackrel{\underline{u}(x):=u(-x)}{=} \\ &= \sum c_k(f)c_k(\underline{u}) \cdot 2\pi = \sum_{k=-n}^n c_k(f * \underline{u}) = \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k(f * \underline{u})e^{ikx} \Big|_{x=0} \rightarrow f * \underline{u} \Big|_{x=0} = \end{aligned}$$

— по признаку Дини

$$= f * \underline{u}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)u(-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(t) dt$$

□