Лекция 14

Ilya Yaroshevskiy

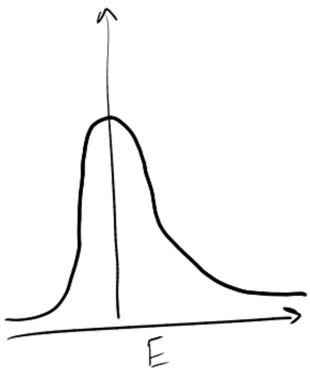
26 июня 2025 г.

Содержание

$f, g \in L^1[-\pi, \pi]$

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt$$

Пример. g :



f — непрерывна
$(f * g) \approx f$

$$g = \left[\begin{array}{ll} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{array}\right. \quad \int_{-\pi}^{\pi} g = 1$$

$\delta_0 :\ \mu\{0\} = 1 \quad \mu(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$

$$\mu E = \int_E g\,dx$$

Обозначение. $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta] = E_\delta$

Определение. Аппроксимативная единица

- $D \subset \mathbb{R}$
- h_0 — предельная точка в $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$ — называется аппроксимативной единицей

AE1 $\forall h \in D,\ K_h \in L^1[-\pi, \pi],\ \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

AE2 L_1 — нормы функций K_h ограничены в совокупности

$$\exists M\ \forall h\ \int_{[-\pi,\pi]} |K_h| \leq M$$

AE3 $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h|\,dx \xrightarrow[h \to h_0]{} 0$$

Замечание. $K_h \geq 0\ \forall h$
Тогда AE1 $\Leftrightarrow$ AE2

Замечание.

AE3' $K_h \in L^\infty[-\pi,\pi]$ и $\forall\delta \in (0;\pi)$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$$

Лемма 1. *AE3' $\Leftrightarrow$ AE3*

Определение. AE1 + AE2 + AE3' = **усиленная аппроксимативная единица**

Теорема 0.1. K_h — a.e.

1. $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi] \implies f * K_h \xrightarrow[h\to h_0]{[-\pi,\pi]} f$
2. $f \in L^1[-\pi,\pi] \implies \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$
3. K_h — усиленная a.e. $f \in L^1[-\pi,\pi]$, f — непрерывная в x
   Тогда
   - $f * K_h$ — непрерывна в x
   - $f * K_h(x) \xrightarrow[h\to h_0]{} f(x)$

Доказательство.

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h\,dt$$

M — из AE2

1. $\varepsilon > 0$, f — равномерно непрерывна

$$\exists\delta > 0\ \forall t, |t| < \delta\ \forall x |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$|f * K_h(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)||K_h(t)|\,dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[h\to h_0]{} 0 \xRightarrow[\text{AE3}]{} \exists V(h_0)\ \forall h \in V(h_0)\ I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. $f \in L^1$, $K_h \in L^\infty \implies f * K_h$ — непрерывна
   Для данного x проверим утверждение $\varepsilon > 0$; $I_1 + I_2 < \varepsilon$; $\exists V(h_0)\ \forall h \in V(h_0)$
   f — непрерывна в x

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall t,\ |t| < \delta \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)|\,dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)|\,dt$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|) \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$$

, т.е. $\exists V(h_0)\ \forall h \in V(h_0)\ I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$

2.
$$\|f * K_h - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h \, dt \right| dx \le$$
$$\le \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)| \, dx \, dt =$$
$$= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} \, dt$$

, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|$ — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$= \|K_h\|_1 \left(g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|} \right)(0)$$

— по п.1 $g(0) = 0$

□

Замечание. Модификация п. 2

$$f \in L^p[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_p \xrightarrow[h \to h_0]{} 0$$

Замечание. Модификация п. 3
$$f \in L^1 \quad \exists f(x-0), f(x+0)$$
K_h — усиленная а.е. $\forall h$ K_h — четная
Тогда
$$(f * K_h)(x) \to \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x_0+0))$$

1 Суммирование рядов Фурье

1.1 Метод средних арифметических

Определение.
$$\sum a_n \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$\sigma_n := \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$
$$\sum a_n \overset{}{\underset{\text{сред. арифм.}}{=\!=\!=\!=\!=}} S$$

, если $\sigma_n \to S$

Теорема 1.1.
$$\sum a_n = S \implies \sum a_n \underset{\text{с.а.}}{=\!=} S$$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N,$ $\forall n > N,$ $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S_k - S) \right| \le \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| =$$
$$= \frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |S_k - S|}{n+1}$$

$\exists N$ $\forall n > N$ эта дробь $< \frac{\varepsilon}{2}$ □

Определение. $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} S_k(f)$$

— суммы Фейера

Замечание.

$$S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt$$

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t)\, dt$$

, где $\Phi_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + \cdots + D_n) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2 \frac{t}{2}}$ — **ядро Фейера**

Теорема 1.2 (Фейера)**.**

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$
   Тогда $\sigma_n(f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f$
2. $f \in L^p[-\pi, \pi] \implies \|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$
3. $f \in L^1$, f — непрерывна в $x \implies \sigma_n(f, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

Доказательство. Проверим: Φ_n — усиленная а.е. и тогда 1-3 следуют из свойства а.е.

AE1 $\Phi_n \in L^1$, т.к. Φ_n — непрерывная (и даже $\Phi_n \in L^\infty$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$$

AE2 следует из AE1, поскольку $\Phi_n \geq 0$

AE3 $t \in E_\delta$

$$0 \leq \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\square$

Замечание. в п.2 $p = 1$ — свойство а.е. было доказано, $p > 1$ — без доказательства

Следствие 1.2.1. $f \in L^1[-\pi, \pi]$ — непрерывна в x. Если ряд Фурье f сходится в точке x

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n(f, x) \text{ — конечный}$$

, то $S_n(f, x) \to f(x)$

Доказательство.

$$\sigma_n(f, x) \to f(x)$$

и по теореме Коши $\square$

Следствие 1.2.2.

1. Тригонометрическая система полна в $L^2[-\pi, \pi]$
2. $f \in L^1[-\pi, \pi]$ $\forall k$ $a_k(f) = 0,\ b_k(f) = 0$ либо $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\mathrm{C_k(f) = 0}$
   Тогда $f = 0$ почти везде

Доказательство.

1. Следствие из 2.: $\forall k$ $f \perp \cos kx$ и $f \perp \sin kx$

   $$0 = \langle f, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx = \pi a_k(f)$$

   , т.е. $a_k = 0$
2. $S_n(f) = 0$ почти везде, $\sigma_n(f) = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде

$\square$

Следствие 1.2.3. $f \in L^2[-\pi, \pi]$
<u>Тогда</u> ряд Фурье f сходится к f в L^2:

$$S_n(f) \to f \text{ в } L^2 \quad \|S_n(f) - f\|_2 \to 0$$

— общее свойство базиса

Следствие 1.2.4. $f \in L^1[0, \pi]$. Коэффициенты f по системе $\{\cos kx\}$ равно 0
<u>Тогда</u> $f = 0$ почти везде
Аналогично для $\{\sin kx\}$

Следствие 1.2.5 (теорема Вейерштрасса). Тригонометрический полином плотный в $L^p[-\pi, \pi]$ и $\tilde{C}[-\pi, \pi]$, $1 \le p < +\infty$

Следствие 1.2.6. $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ Тогда выполняются равенства Парсеваля:

1. $$\int\limits_{[pi, \pi]} f\overline{g} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(h)}$$

2. $$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi \sum |c_k(f)|^2$$

3. $$\int_{-\pi}^{\pi} fg = \pi \left(\frac{a_0(f)a_0(h)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g) \right)$$

4. $$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi \left(\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right)$$

Лемма 2. $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$ — *ядро Дирихле*
<u>*Тогда*</u> $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$\left| \int_0^x D_n(t) \right| < 2$$

Замечание. D_n — не является а.е. — не выполняется АЕ2

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n \asymp \ln n$$

Теорема 1.3. $f \in L^1[-\pi, \pi]$
<u>Тогда</u> $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}\, dx$$

Замечание. ряд Фурье при этом может расходится в том числе всюду

Доказательство. Достаточно доказать: $-\pi \le a < b \le \pi$, $\chi = \chi_{[a,b]}$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}\, dx = \sum \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \cdot 2\pi c_{-k}(\chi) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot S_n(\chi, t)\, dt \to \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \chi = \int_a^b f$$

$$S_n(\chi, t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \chi(t)$$

при $t \in [-\pi, \pi]$, $t \ne a, b$ по признаку Дини

$$S_n(\chi, t) = \int \chi \cdot D_n = \int_a^b D_n(x - t) = \int_0^{b-t} D_n(x)\, dx - \int_0^{a-t} D_n(x)$$

по лемме $|S_n(x,t)| \le 4$. Таким образом

$$f \cdot S_n \to f \cdot \chi \text{ — почти везде}$$

$$|f \cdot S_n| \le \underbrace{4 \cdot |f|}_{\text{сумм.}}$$

Работает условие теоремы Лебега. □

Теорема 1.4 (о ‘слабой‘ сходимости рядов Фурье)**.** $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $\forall u \in \tilde{C}^1[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x) \cdot u(x)\,dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)u(x)\,dx$$

Доказательство.

1. $f \in L^1$ u — непрерывна $\implies$ $u \in L^\infty$ $\implies$ $f * u$ — непрерывная и даже гладкая

$$\frac{d}{dx}(f*u)(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(x-t)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u'_x(x-t)\,dt$$

— обобщенный предел Лейбница

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x)u(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)\,dx \xlongequal[\underline{u}(x):=u(-x)]{}$$

$$= \sum c_k(f)c_k(\underline{u}) \cdot 2\pi = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f*\underline{u}) =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f*\underline{u})e^{ikx}\big|_{x=0} \to f*\underline{u}\big|_{x=0} =$$

— по признаку Дини

$$= f*\underline{u}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)u(-t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(t)\,dt$$

□