

Лекция 13

Лука Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1	Суммируемость ряда Фурье	1
2	Свертки и аппроксимативная единица	4

1 Суммируемость ряда Фурье

Определение.

1.

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)$$

— ядро Дирихле (ядро в смысле kernel)

Ядро $K(x, y)$

$$f \mapsto \int_E f(t)K(x, y) dt$$

— линейный оператор

2.

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

— ядро Фейера

Лемма 1.

1.

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\pi \cdot \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right)$$

2.

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

3. D_n, Φ_n — четные, $\Phi_n \geq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$$

4. $g \in L^1[-\pi, \pi]$

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt$$

Доказательство.

1.

$$2 \sin \frac{t}{2} \cos kt = \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t$$

Получается телескопическая сумма

2. Достаточно проверить

$$\begin{aligned} \sum \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t &= \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \\ \sum_{k=0}^n \sin \frac{t}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t &= \frac{1}{2} \sum \cos kt - \cos(k+1)t = \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)t}{2} = \sin^2 \frac{n+1}{2}t \end{aligned}$$

3. Очевидно

4.

$$\begin{aligned} A_k(f, x) &= \begin{cases} \frac{a_0}{2} & k=0 \\ a_k \cos kx + l_k \sin kx & k \neq 0 \end{cases} \\ A_k(f, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos xt dt \\ S_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n A_k(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt \end{aligned}$$

□

Теорема 1.1 (принцип локализации Римана).

- $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) = g(x)$

Тогда Ряды Фурье f и g ведут себя одинаково в точке x_0 :

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Примечание. Переформулировка:

- $h := f - g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $h \equiv 0$ на $x_0 - \delta, x_0 + \delta$

Тогда $S_n(h, x_0) \rightarrow 0$

Доказательство.

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0+t) \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где

$$h_1(t) = \frac{1}{2} h(x_0+t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2} h(x_0+t)$$

Это рассуждение верно если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$

- Для h_2 — очевидно
- Для h_1 : $h_1 \equiv 0$ при $t \in (-\delta, \delta)$

$$|h_1(t)| \leq |h(x_0+t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \in L^1$$

Тогда $b_n(h_1) \rightarrow 0$, $a_n(h_2) \rightarrow 0$ по теореме Римана-Лебега

□

Примечание.

1. Если $[a, b] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
 $S_n(h, x) \Rightarrow 0$ на $[a, b]$
2. Для определения ряда Фурье нужен весь $[-\pi, \pi]$, а его измерение в точке x_0 зависит от его окрестности
3. $f \in L^1[0, \pi]$ — можно разложить по \sin или по \cos . Тогда в точках $(0, \pi)$ эти разложения ведут себя одинаково

Теорема 1.2 (признак Дини).

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$ (или \mathbb{C})

Пусть

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)|}{t} dt < +\infty \quad (1)$$

Тогда ряд Фурье f сходится к S в точке x_0 , т.е. $S_n(f, x_0) \rightarrow S$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t) \quad \varphi(t) \in L^1 \\ S_n(f, x_0) - S &= \int_{-\pi}^\pi (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt = \int_0^\pi + \int_{-\pi}^0 \dots = \\ &= \int_0^\pi \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \varphi(t) \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2) \end{aligned}$$

, где

$$h_1 = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} & t \in [0, \pi] \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \varphi(t) & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

Доказываемое утверждение следует из теоремы Римана-Лебега, если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$
 $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$? — да, по формуле 1

$$\operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t} \quad \frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_{-\pi}^\pi |h_1| = \int_0^\pi |h_1| = \frac{1}{2} \int_0^\pi |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} < \int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$$

— по 1

□

Примечание.

1. $1 \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$
2. $f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \quad x \in [-\pi, \pi]$
 $\forall S$ интеграл 1 расходится ($x_0 = 0$)

$$s = 0 : \int_0^\pi \frac{1}{t|\ln(t)|} = +\infty$$

Следствие 1.2.1.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$

Пусть существует четыре конечных предела: $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$

$$\alpha_\pm := \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$$

Тогда ряд Фурье f в точке x_0 сходится к $S = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Доказательство.

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е. $\frac{\varphi(t)}{t}$ — ограничена вблизи 0 на $[0, \pi]$ \implies по замечанию 1, интеграл 1 □

Следствие 1.2.2.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- f — непрерывна в точке x_0
- \exists конечные односторонние производные в точке x_0 (либо f дифференцируема в x_0)

Тогда $S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$

Доказательство. Следует из 1.2.1 □

Пример.

- $f(x) = x \quad [-\pi, \pi]$
- $a_k(f) = 0$
- $b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin kt =$

$$= \frac{2}{\pi} t \cdot (-\cos kt) \cdot \frac{1}{k} \Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos kt = \frac{2}{k} (-1)^{k-1}$$

При $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\sum (-1)^{k-1} \cdot \frac{2}{k} \sin kx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

При $x_0 = \pi$ работает 1.2.1

$$\sum \dots \sin \pi x = 0$$

2 Свертки и аппроксимативная единица

Определение. $f, k \in L^1[-\pi, \pi]$

$$(f * k)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t) dt$$

— свертка функций f и k

Свойство 1. Корректность определения

$$g(x, t) = f(x-t) \cdot k(t)$$

1. Проверим, что $\varphi(x, y) := f(x-t)$ — измерима как функция $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, тогда и $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измерима. Обозначим $a \in \mathbb{R}$ $E_a := \mathbb{R}(f(x) < a)$

$$V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$$

— измеримо в $\mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}^2(\varphi < a)$ — тоже измеримо в \mathbb{R}^2

2. $g \in L^1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$?

$$\iint_{[-\pi, \pi]^2} |g(x, t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt |k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1$$

Тогда по теореме Фубини для интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t) dt$$

— при почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ этот интеграл существует (и конечен?) и задает по x функцию из $L^1(-\pi, \pi)$, т.е. $f * k$ определен при почти всех $x, \in L^1[-\pi, \pi]$

Свойство 2. $f * k = k * f$

Доказательство. $t := -t$ □

Свойство 3. $c_n(f * k) = 2\pi \cdot c_n(f) \cdot c_n(k)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f * k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t) \cdot e^{-inx} dt dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} k(t)e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)} dx dt = 2\pi c_n(f) \cdot 2\pi c_n(k) \end{aligned}$$

□

Свойство 4.

- $f \in L^p[-\pi, \pi]$
- $k \in L^q[-\pi, \pi]$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \leq p \leq +\infty$

Тогда $f * k$ — непрерывная функция и $\|f * k\|_{\infty} \leq \|k\|_q \cdot \|f\|_p$

Доказательство. Неравенство очевидно — это неравенство Гельдера

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t) dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \cdot |k(t)| dt \leq \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |k(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|k\|_q \end{aligned}$$

Непрерывность:

$$|f * k(x+h) - f * k(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))k(t) dt \right| \leq \|k\|_q \cdot \|f_h(x) - f(x)\|_p$$

□

Свойство 5.

- $f \in L^p[-\pi, \pi] \quad 1 \leq p \leq +\infty$
- $k \in L^1[-\pi, \pi]$

Тогда $f * k \in L^p[-\pi, \pi]$

$$\|f * k\|_p \leq \|k\|_1 \cdot \|f\|_p$$