Лекция 13

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1 Суммируемость ряда Фурье

Определение.

1. $$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right)$$

   — **ядро Дирихле** (ядро в смысле kernel)
   Ядро $K(x, y)$
   $$f \mapsto \int_E f(t)K(x, y)\, dt$$
   — линейный оператор

2. $$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

   — **ядро Фейера**

Лемма 1.

1. $$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\pi \cdot \sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt + \cos nt\right)$$

2. $$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

3. D_n, Φ_n *— четные,* $\Phi_n \geq 0$
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$$

4. $g \in L^1[-\pi, \pi]$
$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\, dt$$

Доказательство.

1. $$2\sin\frac{t}{2}\cos kt = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t$$

   Получается телескопическая сумма

2. Достаточно проверить
$$\sum \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \frac{1}{2}\sum \cos kt - \cos(k+1)t =$$
$$\frac{1-\cos(n+1)t}{2} = \sin^2\frac{n+1}{2}t$$

3. Очевидно

4.
$$A_k(f,x) = \left[\begin{array}{ll} \frac{a_0}{2} & k=0 \\ a_k\cos kx + l_k \sin kx & \end{array}\right.$$
$$A_k(f,x) = \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,dt \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos xt\,dt \end{array}$$
$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt$$

□

Теорема 1.1 (принцип локализации Римана)**.**

- $f, g \in L^1[-\pi,\pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad f(x) = g(x)$

Тогда Ряды Фурье f и g ведут себя одинаково в точке x_0:
$$S_n(f,x_0) - S_n(g,x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Замечание. Переформулировка:

- $h \coloneqq f-g \in L^1[-\pi,\pi]$
- $h \equiv 0$ на $x_0-\delta, x_0+\delta$

Тогда $S_n(h,x_0) \to 0$

Доказательство.
$$S_n(h,x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x_0+t)(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt + \cos nt)\,dt = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$
, где
$$h_1(t) = \frac{1}{2}h(x_0+t)\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2}h(x_0+t)$$
Это рассуждение верно если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi,\pi]$

- Для h_2 — очевидно
- Для h_1: $h_1 \equiv 0$ при $t \in (-\delta,\delta)$
$$|h_1(t)| \le |h(x_0+t)|\cdot\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \in L^1$$

  Тогда $b_n(h_1) \to 0,\ a_n(h_2) \to 0$ по теореме Римана-Лебега

□

Замечание.

1. Если $[a,b] \subset (x_0-\delta, x_0+\delta)$
   $S_n(h,x) \rightrightarrows 0$ на $[a,b]$

2. Для определения ряда Фурье нужен весь $[-\pi,\pi]$, а его измерение в точке x_0 зависит от его окрестности

3. $f \in L^1[0,\pi]$ — можно разложить по sin или по cos. Тогда в точках $(0,\pi)$ эти разложения ведут себя одинаково

Теорема 1.2 (признак Дини)**.**

- $f \in L^1[-\pi,\pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

Пусть
$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0+t)-2S+f(x_0-t)|}{t}\,dt < +\infty \tag{1}$$
Тогда ряд Фурье f сходится к S в точке x_0, т.е. $S_n(f,x_0) \to S$

Доказательство.
$$\varphi(t) \coloneqq f(x_0+t)-2S+f(x_0-t) \quad \varphi(t) \in L^1$$
$$S_n(f,x_0)-S = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+t)-S)D_n(t)\,dt = \int_0^\pi + \int_{-\pi}^0 \dots =$$
$$= \int_0^\pi \varphi(t)D_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\varphi(t)\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt + \cos nt\right) = b_n(h_1)+a_n(h_2)$$
, где
$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & t\in[-\pi,0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2} & t\in[0,\pi]\end{bmatrix} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 & t\in[-\pi,0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t) & t\in[0,\pi]\end{bmatrix}$$
Доказываемое утверждение следует из теоремы Римана-Лебега, если $h_1,h_2 \in L^1[-\pi,\pi]$
$h_1,h_2 \in L^1[-\pi,\pi]$? — да, по формуле 1
$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t} \quad \frac{t}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}|h_1| = \int_0^\pi |h_1| = \frac{1}{2}\int_0^\pi |\varphi(t)|\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2} < \int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$$
— по 1 ☐

Замечание.

1. 1 $\Leftrightarrow \forall\delta>0 \int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$
2. $f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \quad x\in[-\pi,\pi]$
   $\forall S$ интеграл 1 расходится $(x_0=0)$
$$s=0: \int_0^\pi \frac{1}{t|\ln(t)|} = +\infty$$

Следствие 1.2.1.

- $f \in L^1[-\pi,\pi]$
- $x_0 \in [-\pi,\pi]$

Пусть существует четыре конечных предела: $f(x_0+0), f(x_0-0)$
$$\alpha_\pm \coloneqq \lim_{t\to\pm0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0\pm0)}{t}$$
Тогда ряд Фурье f в точке x_0 сходится к $S=\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$

Доказательство.

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t} \xrightarrow[t\to+0]{} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е. $\frac{\varphi(t)}{t}$ — ограничена вблизи 0 на $[0,\pi]$ $\implies$ по замечанию 1, интеграл 1 □

Следствие 1.2.2.

- $f \in L^1[-\pi,\pi]$
- f — непрерывна в точке x_0
- $\exists$ конечный односторонние производные в точке x_0 (либо f дифференцируема в x_0)

Тогда $S_n(f,x_0) \to f(x_0)$

Доказательство. Следует из 1.2.1 □

Пример.

- $f(x) = x \quad [-\pi,\pi]$
- $a_k(f) = 0$
- $b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\sin kt =$

$$= \frac{2}{\pi}t\cdot(-\cos kt)\cdot\frac{1}{k}\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos kt = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}$$

При $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\sum(-1)^{k-1}\cdot\frac{2}{k}\sin kx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

При $x_0 = \pi$ работает 1.2.1

$$\sum \dots \sin \pi x = 0$$

2 Свертки и аппроксимативная единица

Определение. $f, k \in L^1[-\pi,\pi]$

$$(f*k)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\,dt$$

— **свертка** функций f и k

Свойство 1. *Корректность определения*

$$g(x,t) = f(x-t)\cdot k(t)$$

1. *Проверим, что $\varphi(x,y) \coloneqq f(x-t)$ — измерима как функция $\mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, тогда и $g : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима. Обозначим $a \in \mathbb{R}$ $E_a \coloneqq \mathbb{R}(f(x) < a)$*

$$V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$$

   — измеримо в $\mathbb{R}^2$ $\implies$ $\mathbb{R}^2(\varphi < a)$ — тоже измеримо в $\mathbb{R}^2$

2. *$g \in L^1([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$?*

$$\iint_{[-\pi,\pi]^2} |g(x,t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt|k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,dx = \|f\|_1\cdot\|k\|_1$$

   Тогда по теореме Фубини для интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\,dt$$

   — при почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ этот интеграл существует(и конечен?) и задает по x функцию из $L^1(-\pi,\pi]$, т.е. $f*k$ определен при почти всех x, $\in L^1[-\pi,\pi]$

Свойство 2. $f * k = k * f$

Доказательство. $t \coloneqq -t$ □

Свойство 3. $c_n(f * k) = 2\pi \cdot c_n(f) \cdot c_n(k)$

Доказательство.

$$2\pi c_n(f * k) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t) \cdot e^{-inx}\, dt\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} k(t)e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}\, dx\, dt = 2\pi c_n(f) \cdot 2\pi c_n(k)$$

□

Свойство 4.

- $f \in L^p[-\pi, \pi]$
- $k \in L^q[-\pi, \pi]$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \le p \le +\infty$

Тогда $f * k$ *— непрерывная функция и* $\|f * k\|_\infty \le \|k\|_q \cdot \|f\|_p$

Доказательство. Неравенство очевидно — это неравенство Гельдера

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\, dt \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \cdot |k(t)|\, dt \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |k(t)|^1 \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|k\|_q$$

Непрерывность:

$$|f * k(x+h) - f * k(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+h-t) - f(x-t)\right) k(t)\, dt \right| \le \|k\|_q \cdot \|f_h(x) - f(x)\|_p$$

□

Свойство 5.

- $f \in L^p[-\pi, \pi] \quad 1 \le p \le +\infty$
- $k \in L^1[-\pi, \pi]$

Тогда $f * k \in L^p[-\pi, \pi]$

$$\|f * k\|_p \le \|k\|_1 \cdot \|f\|_p$$