Лекция 12

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

$\mathcal{H}$ — гильбертово

$\{e_k\}$ — ортогональная система, $x \in \mathcal{H}$

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k\rangle}{\|e_k\|^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k(x)e_k\right\| \le \|x\|$$

Следствие 0.0.1 (Неравенство Бесселя).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \le \|x\|^2$$

Теорема 0.1 (Рисс, Фишер)**.**

- $\{e_k\}$ — ОС в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

Тогда

1. ряд Фурье вектора x сходится в $\mathcal{H}$
2. $$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k + z \quad z \perp e_k,\ \forall k$$
3. $$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k \Leftrightarrow \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Доказательство.

1. Ряд Фурье — ортогональный ряд. Сходимость ряда Фурье $\Leftrightarrow$ сходимость
$$\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$$
Это выполняется по неравенству Бесселя
2. $z = x - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$
$$\langle z, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle - \sum c_k(x)\langle e_k, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle - c_n(x)\|e_n\|^2 = 0$$
3. $(\Rightarrow)$ Теорема 1.3?

($\Leftarrow$) из п.2 $\|x\|^2 = \|\sum c_k(x)e_k\| + \|z\|^2 \implies \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$
Дано:

$$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\| \implies z = 0 \implies x = \sum c_k(x)e_k$$

$\square$

Замечание. $\mathcal{L} = \mathrm{Cl}(\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots))$, где Cl — замыкание
$\sum c_k(x)e_k$ — проекция x на $\mathcal{L}$

Замечание. $\mathcal{H}$, e_k — ОНС, тогда последовательность $(c_k(x))_{x\in\mathbb{N}} \in l_2$
Обратное тоже верно: $\forall c(x) \in l_2\ \exists x \in \mathcal{H}\ c_k = c_k(x)$ $[x \coloneqq \sum c_k e_k$ — сходится$]$

Замечание. Если ортогональный ряд сходится, то он есть ряд Фурье своей суммы

Определение. $\{e_k\}$ — ОС — **базис** $\mathcal{H}$, если $\forall x \in \mathcal{H}\ x = \sum c_k(x)e_k$

Определение. ОС – **полная**, если $\nexists z \neq 0 :\ z \perp$ всем e_k

Определение. ОС — **замкнутая**, если $\forall x\ \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

Теорема 0.2 (о характеристике базиса)**.** $\{e_k\}$ — ОС в $\mathcal{H}$. Тогда эквивалентны

1. $\{e_k\}$ — базис
2. $\forall x, y$ — выполняется обобщенное уравнение замкнутости
$$\langle x, y\rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$
3. $\{e_k\}$ — замкнута
4. $\{e_k\}$ — полная
5. $\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots)$ — плотна в $\mathcal{H}$, т.е. $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots) = \mathcal{H}$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \quad 4 \Leftrightarrow 5$

($1 \Rightarrow 2$) Берем $x = \sum c_k(x)e_k$ и скалярное умножаем на y:

$$\langle e_k, y\rangle = \overline{\langle y, e_k\rangle} = \overline{c_k(y) \cdot \|e_k\|^2} = \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$

$$\langle x, y\rangle = \dots$$

($2 \Rightarrow 3$) $y \coloneqq x$ в обобщенное уравнение

($3 \Rightarrow 4$) $\exists z : \forall n\ \langle z, e_n\rangle = 0$?, т.е. $c_n(z) = 0$
Для этого z уравнение замыкания $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \|e_k\|^2 = 0$

($4 \Rightarrow 1$) по теореме Рисса-Фишера $x = \sum c_k(x)e_k + z$, где $\forall k :\ z \perp e_k$. В силу полноты ОС $z = 0$

($4 \Rightarrow 5$) $\mathcal{L} \coloneqq \mathrm{Cl}\,\mathrm{Lin}\{e_k\}$. Надо проверить $\mathcal{L} = \mathcal{H}$.
Если $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, то по теореме Рисса-Фишера как в предыдущем пункте $z = 0$, т.е. $x \in \mathcal{L}$

($5 \Rightarrow 4$) Если $z \perp$ всем $e_k \implies z \perp \mathrm{Lin}\{e_k\} z \perp \mathcal{L}$, но $\mathcal{L} = \mathcal{H} \implies z \perp z$, т.е. $\langle z, z\rangle = 0$

$\square$

1 Тригонометрические ряды Фурье

Определение. $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический полином** степени не выше n

Определение.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— тригонометрический ряд, a_k, b_k **— коэффициенты тригонометрического ряда**

Определение.

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

— **комплексный тригонометрический полином** или **тригонометрический полином в комплексной записи**

Определение.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

— **тригонометрический ряд в комплексной записи**

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

Лемма 1. *Дан тригонометрический ряд(вещественный или комплексный). Пусть $S_n \to f$ в $L^1[-\pi,\pi]$ ($\|S_n - f\|_1 = \int_{[-\pi,\pi]} |S_n - f| \to 0$)*
<u>Тогда</u>

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

или

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$$

Доказательство. Докажем для a_k. Пусть $n \geq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\cos kt\,dt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k\cos^2 kt\,dt = \pi a_k$$

При $k = 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cdot 1 = \pi a_0$

$$\left|\pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(t) - f(t))\cos kt\,dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)|\,dt = \|S_n - f\|_1 \to 0$$

□

Определение. $f \in L^1[-\pi,\pi]$. $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$ — заданные в лемме называются **коэффициентами Фурье функции** f а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$$

или

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

называются **рядом Фурье функции** f

Замечание. $f \in L^1[-\pi,\pi]$

- f — четная $\implies \forall k\ b_k(f) = 0,\ a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$
- f — нечетная $\implies a_k(f) = 0,\ b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$

Замечание. $f \in L^1[0,\pi]$ — для таких функций рассматривается два ряда Фурье — для четного и нечетного продолжения f

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k(f)\cos kx$$

, где a_k – из 1 пункта замечания

$$f \sim \sum b_k(f)\sin kx$$

, где b_k – из 2 пункта замечания

Лемма 2.

$$A_k(f,x) := \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2}a_0(f) & k=0 \\ a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx & k=1,2,\dots \end{array}\right.$$

Тогда

$$A_k(f,x) = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,dt \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos kt\,dt \end{array}\right.$$

Доказательство.

(A)

$$A_k(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos kx + f(t)\sin kt\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(t-x))\,dt = \Big|\ t = x+\tau\ \ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\cos k\tau\,d\tau$$

(B) Если $f \in L^1[-\pi,\pi]$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \le \frac{1}{\pi}\|f\|_1$

$$|A_k(t)| \le \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{\pi}\|f\|_1 & k=0 \\ \frac{1}{2\pi}\|f\|_1 & k=1,2,\dots \end{array}\right.$$

□

Пример. Контрпримеры

1. До Буа Реймонд $\exists f \in \tilde{c}$ — ряд Фурье расходится в некоторой точке
2. Лебег $\exists f \in \tilde{c}$ — ряд Фурье сходится неравномерно
3. Колмагоров $\exists f \in L^1$ — ряд Фурье расходится в каждой точке
4. Карлесон $f \in L^2$ — ряд Фурье сходится почти везде
5. Хант $f \in L^p,\ 1 < p < +\infty$ – ряд Фурье сходится почти везде

Теорема 1.1 (Римана-Лебега)**.**

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\int_E f(t)e^{i\lambda t}\,dt \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

$$\int_E f(t)\cos\lambda t \to 0$$

$$\int_E f(t)\sin\lambda t \to 0$$

В частности $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Доказательство. н.у.о $E = \mathbb{R}$ [пусть $f = 0$ на E]

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \Big|\ t = \tau + \frac{\pi}{\lambda}\ \ = -\int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{\lambda})e^{i\lambda\tau}\,d\tau$$

Значит

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right)e^{i\lambda t}\,dt$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\cdot|e^{i\lambda t}|\,dt \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

По Лемме о непрерывности сдвига

□

Следствие 1.1.2. Пусть
$$\omega(f,h)=\sup_{\substack{x,y\in E\\|x-y|\le h}}|f(x)-f(y)|$$
— модуль непрерывности Если $f\in\tilde{C}[-\pi,\pi]$, то $|a_k(f)|,|b_k(f)|,|2c_k(f)|\le\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)$

Доказательство.
$$|2c_{-k}(f)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{ikt}\,dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{k}\right)\right|\,dt\le$$
$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)\,dt=\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)$$
□

Следствие 1.1.3.

- $E\subset\mathbb{R}$, $E=\langle a,b\rangle$

Класс Липшица: $M>0,\ \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\in(0,1]$
$$\operatorname*{Lip}_M\alpha(E)=\{f:E\to\mathbb{R}:\forall x,y\ |f(x)-f(y)|\le M|x-y|^\alpha\}$$
Пусть $f\in\mathrm{Lip}_M\alpha$, тогда при $k\ne0$
$$|a_k(f)|,|b_k(f)|,|2c_k(f)|\le\frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$$

Доказательство. $f\in\mathrm{Lip}_M\,\alpha\implies\omega(f,h)\le Mh^\alpha$. □

Замечание. f — дифференцируема, $f'\le M$, тогда $f\in\mathrm{Lip}_M\,1$

Следствие 1.1.4.

1. $f\in\tilde{C}^{(r)}[-\pi,\pi]$
   Тогда $|a_k(f)|,|b_k(f)|,|c_k(f)|\le\frac{const}{|k|^r}$
2. $f\in\tilde{C}^{(r)}$, $f^{(r)}\in\mathrm{Lip}_M\,\alpha,\ 0<\alpha\le1$
   Тогда $|a_k(f)|,|b_k(f)|,|2c_k(f)|\le\frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$

Доказательство. Проведем эксперимент, после которого доказательство станет очевидным
$f\in\tilde{C}[-\pi,\pi]$, тогда при $k\ne0$
$$a_k(f')=kb_k(f)$$
$$b_k(f')=-ka_k(f)$$
$$c_k(f')=ikc_k(f)$$
— интегрирование по частям
$$c_k(f')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)e^{-ikt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\left(f(t)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot ik\cdot e^{ikt}\,dt\right)$$
□