Лекция 11

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

Замечание. Соглашение: $L^p[0,T],\ T \in \mathbb{R}$ — это пространство можно понимать как пространство T-периодических функций

$$\forall x f(x) = f(x+T)$$

- $\tilde{f}$ — представитель $\tilde{f}_1$ — еще один
- $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x+T)$ почти везде

Удобство: $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$

$$C[a,b]\ \|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

$\tilde{C}[0,T]$ — непрерывные T-периодические функции

- $f \in C[0,T],\ f \in \tilde{C}[0,T] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} f$ — равномерно непрерывна
- в $L^p[0,T]$ функции из $\tilde{C}$ образуют плотное множество

Пример. Линейная функция на $L^p(X,\mu)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
берем $g \in L^q(X,\mu)$ и строим отображение $L^p \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto \int_X fg\,d\mu \quad \left|\int_X fg\right| \le \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$|\alpha f_n - \alpha(f)| = \left|\int_X (f_n - f)g\right| \le \|f_n - f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Определение.

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) \coloneqq f(x+h)$ — **Сдвиг**

Теорема 0.1 (о непрерывности сдвига)**.**

1. f — равномерно непрерывна.
   Тогда $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$,
   т.е. $\sup_x |f(x+h) - f(x)| \to 0$
2. $f \in L^p(\mathbb{R}^m),\ 1 \le p < +\infty$
   Тогда $\|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
3. $f \in \tilde{C}[0,T]$
   Тогда $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
4. $1 \le p < +\infty,\ f \in L^p[0,T]$
   Тогда $\|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Замечание.

1. Для L^∞ непрерывности сдвига нет

$$f = \mathcal{X}_{[0,1]} \quad f_h = \mathcal{X}_{[-h,1-h]}$$

$$\operatorname{ess\,sup} |f - f_n| = 1$$

2. Во всех упомянутых 2 и 4

$$h \mapsto \|f_h - f\|_p$$

непрерывно в нуле $\implies$ непрерывно всюду

$$\|f_h - f\|_p - \|f_{h_0} - f\|_p \le \|f_h - f_{h_0}\|_p = \|f_{h-h_0} - f\|_p \xrightarrow[h \to h_0]{} 0$$

Доказательство.

2), 4) $\forall \varepsilon > 0\ \forall f \in L^p[0,T]\ \exists g$ — непрерывная

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда g — равномерно непрерывна

$$\|f_h - f\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \le \frac{\varepsilon}{3} + \|g - g_h\|_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

4)

$$\|g_h - g\|_p = \left(\int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\|g_h - g\|_\infty^p \cdot \int_0^T 1 \, dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= T^{\frac{1}{p}} \cdot \|g_h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

2) g — финитная, $\sup g \in B(0,R)$ Пусть $|h| < 1$

$$\|g_h - g\|_p \le \|g_h - g\|_{L^p(B(0,R+1),\lambda_m)} \le \|g_h - g\|_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

□

1 Гильбертово пространство

- X — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$
- Скалярное произведение $X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
  1. $\langle x, x \rangle \ge 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  2. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \gamma \rangle = \alpha_1 \langle x, y \rangle + \alpha_2 \langle x, y \rangle$
  3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ($\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$)

  Неравенство Коши-Буняковского: $| \langle x, y \rangle |^2 \le \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Определение. $\mathcal{H}$ — линейное пространство в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при это $\mathcal{H}$ — полное (как метрическое пространство), то оно называется **Гильбертовым пространством**

Пример.

1. $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$

2. $L^2(X, \mu)$ — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

Корректное неравенство Коши-Буняковского для интеграла:

$$\left| \int_X f\overline{g} \right| \leq \left(\int_X |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |\overline{g}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Это скалярное произведение

$$\langle g, f \rangle = \int_X g\overline{f} = \overline{\left(\int_X fg \right)}$$

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

— именно текущую норму в L^2 мы и рассматривали с самого начала

- L^2 — полно
- L^2 — гильбертово

3. Антипример $L^p, p \neq 2$ — не Гильбертово

4. $l^2 = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty},\ x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \big| \sum |x_j|^2 < +\infty\}$

$$\langle x, y \rangle \coloneqq \sum_j x_j \overline{y_j} = \int_{\mathbb{R}} x(j)\overline{y(j)}\, d\mu(j)$$

μ — дискретная мера на $\mathbb{N}$, $\forall i \mu\{i\} = 1$ $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0$

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_j|^2}$$

Определение. Сходящийся ряд: $\sum a_n,\ a_n \in \mathcal{H}$

$$S_N = \sum_{1 \leq n \leq N} a_n$$

Если $\exists S \in \mathcal{H}$ $S_N \to S$ в $\mathcal{H}$

Определение. $x, y \in \mathcal{H}$ x **ортогонально** y $(x \perp y)$ если $\langle x, y \rangle = 0$

Определение. $A \subset \mathcal{H}$ $x \perp A : \forall a \in A$ $\langle x, a \rangle = 0$

Определение. Ряд $\sum a_k$ — **ортогональный**, если $\forall k, l$ $a_k \perp a_l$

Пример. $a_k \in l^2 : (0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots)$, тогда $\sum a_k$ — ортогональный

$$\sum a_k = S = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in l^2$$

Свойство 1. *$x_n \to x$, $y_n \to y$ в $\mathcal{H}$*
Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

Доказательство.

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq$$

$$\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$$

□

Свойство 2. *$\sum x_k$ — сходится*
Тогда $\forall y \in \mathcal{H}$ $\langle \sum x_k, y \rangle = \sum \langle x_k, y \rangle$

Доказательство.

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$$

$$\langle S_N, y\rangle \to \langle S, y\rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle$$

$$\langle S_N, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y\rangle$$

— это частичные сумма ряда из правой части □

Свойство 3. $\sum x_k$ *— ортогональный ряд*
Тогда $\sum x_k$ *— сходится* $\Leftrightarrow \sum \|x_k\|^2$ *— сходится*

Доказательство. $S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k$

$$\|S_N\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{N} x_k, \sum_{j=1}^{N} x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j\rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle x_k, x_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2$$

$\Rightarrow$ S_N — фундаментальная $\implies$ S_N — фундаментальная в $\mathcal{H}$

$\Leftarrow$ S_N — сходится в $\mathcal{H}$

□

Определение. $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ — **ортогональное семейство**. Если:

1. $\forall k, l \ e_k \perp e_l$
2. $\forall k \ e_k \neq 0$

Если потребовать

3. $\|e_k\| = 1$

, то будет **ортонормированное семейство**

Замечание. $\{e_k\}$ — О.С. $\implies \left\{\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\}$ — О.Н.С
Пример. l^2, $e_k \coloneqq (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ — О.Н.С.
Пример. $L^2[0, 2\pi]$ $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$ — О.Н.С.

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos lt = \frac{1}{2}\int_0^{s\pi} \cos(kt - lt) + \cos(kt + lt)\, dt = \left[\begin{array}{ll} 0 & k \neq l \\ \pi & k = l \end{array}\right.$$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$ — О.Н.С
Пример. $L^2[0, 2\pi]$ над $\mathbb{C}$

$$\left\{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ — О.Н.С}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}\, dt \overset{}{\underset{k\neq l}{=\!=}} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(k-l)i} e^{i(k-l)t}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

Пример. $L^2[0, \pi]$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2t, \dots\right\} \text{ — О.Н.С.}$$

Теорема 1.1.

- $\{e_k\}$ — О.С. в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Тогда

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З
2. $c_k \coloneqq \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$
3. $c_k e_k$ — это проекция x на прямую $\{te_k,\ t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$
   $x = c_k e_k + z,\ z \perp e_k$

Доказательство.

1. $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$
   $\alpha_n \|e_n\|^2 = 0 \implies \alpha_n = 0$
2. $$\langle x, e_k \rangle = \sum \langle c_j e_j, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2$$
3. $$\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k e_k, e_k \rangle = 0$$

□

Определение. $\{e_k\}$ — О.С. $x \in \mathcal{H}$

$$c_k(x) \coloneqq \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

— называются **коэффициентами Фурье элемента** x **по системе** $\{e_k\}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \cdot e_k$$

— ряд Фурье вектора x **по системе** e_k

Замечание. При замене ОС на ОНС $\left\{\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\} = \tilde{e}_k$ ряд Фурье не изменится

$$\frac{\langle x, \tilde{e}_k \rangle}{\|\tilde{e}_k\|^2} = \left\langle x, \frac{e_k}{\|e_k\|} \right\rangle = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|}$$

$$\tilde{c}_k \cdot \tilde{e}_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|} \cdot \frac{e_k}{\|e_k\|} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} \cdot e_k = c_k(x) \cdot e_k$$

Теорема 1.2 (о свойствах частичных сумм ряда Фурье)**.**

- $\{e_k\}$ — ОС в H
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} c_k(x) e_k \in \mathcal{L}_n = \operatorname{Lin}(e_1, \dots, e_n)$$

Тогда

Свойство 1. *S_n — проекция x на $\mathcal{L}_n$, т.е. $x = S_n + z \implies z \perp \mathcal{L}_n$*

Доказательство. $k = 1, \dots, n$

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) \|e_k\|^2 = 0$$

□

Свойство 2. *S_n — элемент наилучшего приближения для x в $\mathcal{L}_n$*

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$$

Доказательство. $x = S_n + z$

$$\|x-y\|^2 = \|\underbrace{(S_n - y)}_{\in\mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp\mathcal{L}_n}\| = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

□

Свойство 3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Доказательство.

$$\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$$

□