

Лекция 10

Пяа Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1 Формула Стокса

2

Теорема 0.1 (Формула Остроградского).

- $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$
- G — компактно
- ∂G — кусочно гладкая
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- $R: \text{окр.}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V} R dx dy = \iint_{\partial V} 0 dy dz + 0 dz dx + R dx dy$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} &= \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_G R(x, y, F(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\Omega_f} R dx dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R dx dy}_0 \end{aligned}$$

□

Следствие 0.1.1 (обобщение формулы Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Определение. V — гладкое векторное поле. **Дивергенция:**

$$\text{div } V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Замечание.

$$\text{div} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \text{div } V dx dy dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, \bar{n}_0 \rangle ds$$

— не зависит от координат

Следствие 0.1.2.

- $l \in \mathbb{R}^3$
- $f \in C^1(\text{окр.}(V))$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dx dy dz = \iint_{\partial V} f \cdot \langle f, n_0 \rangle ds$$

1 Формула Стокса

Определение.

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Omega} \langle \text{rot}(V), n_0 \rangle ds$$

$$\text{rot } V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

— ротор векторного поля (вихрь векторного поля)

Пример.

$$V(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

$$\text{rot } V = (0, 0, 2)$$

Замечание. $V = (P, Q, R)$ — потенциально, $\exists f$

$$V = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Теорема 1.1 (Пуанкаре).

- Ω — область

Тогда V — потенциально $\Leftrightarrow \text{rot } V = 0$

Определение. Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ — **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если \exists гладкое векторное поле B в Ω :

$$A = \text{rot } B$$

B — называется **векторным потенциалом** A

Теорема 1.2 (Пуанкаре').

- Ω — открытый параллелепипед
- A — векторное поле в Ω , $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow \text{div } A = 0$

Доказательство.

(\Rightarrow) $\text{div rot } B = 0$

(\Leftarrow) Дано:

$$A_{1x}' + A_{2y}' + A_{3z}' = 0 \tag{1}$$

. Найдем векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, $A = \text{rot } B$. Пусть $B_3 \equiv 0$

$$\left. \begin{aligned} B_{3y}' - B_{2z}' &= A_1 \\ B_{1z}' - B_{3x}' &= A_2 \\ B_{2x}' - B_{1y}' &= A_3 \end{aligned} \right\} \rightsquigarrow \begin{aligned} -B_{2z}' &= A_1 & (1) \\ B_{1z}' &= A_2 & (2) \\ B_{2x}' - B_{1y}' &= A_3 & (3) \end{aligned}$$

(1)

$$B_2 := - \int_{z_0}^z A_1 dz + \varphi(x, y)$$

(2)

$$B_1 := \int_{z_0}^z A_2 dz$$

(3)

$$- \int_{z_0}^z A_{1x}' dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^z A_{2y}' dz = A_3 \stackrel{1}{\Rightarrow} \int_{z_0}^z A_{3z}' dz + \varphi'_x = A_3$$

$$A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x = A_3(x, y, z) \Leftrightarrow \varphi'_x = A_3(x, y, z_0)$$

Отсюда найдем $\varphi = \int_{x_0}^x A_3(x, y, z_0) dx$

□

Замечание.

$$\int_{\partial\Omega} A_l dl = \int_{\partial\Omega} \langle A, l_0 \rangle dl = \iint_{\Omega} (\operatorname{rot} A)_n ds$$

$$(\operatorname{rot} A)_n(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\Omega_\varepsilon} (\operatorname{rot} A)_n ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda\Omega} \cdot \int_{\partial\Omega_\varepsilon} A_l dl$$

Лемма 1 (Урысона).

- X — нормальное
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутые, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная, $0 \leq f \leq 1$, $f|_{F_0} = 0$, $f|_{F_1} = 1$

Доказательство. Перефразируем нормальность: Если $F \subset G$, то $\exists U(F)$ — открытое:

$$F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$$

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^C \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^C}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$\overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}} \subset G_1$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом для любого двоично рационального числа $\alpha \in [0, 1]$ найдется множество G_α

$$f(x) := \inf\{\alpha - \text{двоично рациональное} \mid x \in G_\alpha\}$$

Проверим что: f — непрерывно $\Leftrightarrow f^{-1}(a, b)$ — всегда открыто. Достаточно проверить:

1. $\forall b f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

Покажем это:

1.

$$f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q < b \\ q - \text{дв. рац.}}} G_q - \text{открыто}$$

(\supset) Очевидно: При $x \in G_q$ $f(x) \leq q - b$

(\subset) $f(x) = b_0 < b$ Возьмем $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

2. $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q > a} G_q = \bigcap_{q > a} \overline{G_q}$ — замкнуто

(\supset) Тривиально

(\subset) q, r — двоично рациональные

$$\bigcap_{\substack{q > a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

□

Теорема 1.3.

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_{\mathfrak{M}})$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$, $1 \leq p < +\infty$ множество непрерывных финитных функций плотно

Замечание. f — финитная в $\mathbb{R}^m = \exists$ шар B $f = 0$ вне B . f — непрерывная финитная на $E = \exists g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ $f = g|_E$

Доказательство. Ступенчатые функции плотны в $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$. Достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0 \forall A \subset E$ — ограниченного, $\exists f$ — финитная непрерывная: $\|f - \chi_A\|_p < \varepsilon$.

Как потсроить для $\forall h \in L^p$ финитную непрерывную f : $\|h - f\|_p < \varepsilon$? $\exists g$ — ступенчатая:

$$g = \sum_{\text{кон.}} a_k \chi_{A_k} \quad \|h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

Подберем f_k : $\|f_k - \chi_{A_k}\| < \frac{\varepsilon}{\sum |a_i| \cdot 2}$

$$\|h - f\|_p \leq \|h - g\| + \|g - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum |a_k| \|\chi_{A_k} - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \underset{\text{замкн.}}{F} \subset A \subset \underset{\text{откр.}}{G} \quad \lambda_{\mathfrak{M}}(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона $\exists f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная: $f|_F \equiv 1$, $f|_{G^c} \equiv 0$

$$\|f - \chi_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \chi_A|^p d\lambda_{\mathfrak{M}} = \int_{G \setminus F} |f - \chi_A|^p \leq 1 \cdot \lambda_{\mathfrak{M}}(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

Замечание. В $L^\infty(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$ утверждение теоремы неверно. $L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$ $B(\chi_{[a,b]}, \frac{1}{2})$ не содержит непрерывных функций

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}} |f - \chi_A| &\geq \max\left(\lim_{x \rightarrow a+0} |f(x) - \chi_A|, \lim_{x \rightarrow a-0} |f(x) - \chi_A|\right) = \\ &= \max(|f(a) - 1|, |f(a) - 0|) \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Замечание. В $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$, $p < +\infty$ плотны:

- Линейные комбинации характеристических функций ячеек
- Гладкие функции
- Рациональные линейные комбинации рациональных ячеек
- Непрерывные функции