Лекция 10

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

Теорема 0.1 (Формула Остроградского)**.**

- $V = \{(x, y, z) \big| (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \le z \le F(x, y)\}$
- G — компактно
- ∂G — кусочно гладкая
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- R: окр.$(V) \to \mathbb{R}$, $\in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} R\, dx\, dy = \iint_{\partial V} 0\, dy\, dz + 0\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Доказательство.

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} = \iint_G dx\, dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint_G R(x, y, F(x, y))\, dx\, dy - \iint_G R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy =$$
$$= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z)\, dx\, dy + \iint_{\Omega_f} R\, dx\, dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R\, dx\, dy}_{0}$$

□

Следствие 0.1.1 (обобщение формулы Остроградского)*.*

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Определение. V — гладкое векторное поле. **Дивергенция**:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Примечание.

$$\operatorname{div} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V\, dx\, dy\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, \overline{n}_0 \rangle ds$$

— не зависит от координат

Следствие 0.1.2.

- $l \in \mathbb{R}^3$
- $f \in C^1(\text{окр}(V))$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial V} f \cdot \langle f, n_0 \rangle ds$$

1 Формула Стокса

Определение.

$$\int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Omega} \langle rot(V), n_0 \rangle ds$$

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

— ротор векторного поля (вихрь векторного поля)

Пример.

$$V(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

$$\operatorname{rot} V = (0, 0, 2)$$

Примечание. $V = (P, Q, R)$ — потенциально, $\exists f$

$$V = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Теорема 1.1 (Пуанкаре)**.**

- Ω — область

Тогда V — потенциально $\Leftrightarrow \operatorname{rot} V = 0$

Определение. Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ — **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если $\exists$ гладкое векторное поле B в Ω:

$$A = \operatorname{rot} B$$

B — называется **векторным потенциалом** A

Теорема 1.2 (Пуанкаре')**.**

- Ω — открытый паралеллепипед
- A — векторное поле в Ω, $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

Доказательство.

($\Rightarrow$) $\operatorname{div} \operatorname{rot} B = 0$

($\Leftarrow$) Дано:

$$A_1{}'_x + A_2{}'_y + A_3{}'_z = 0 \tag{1}$$

. Найдем векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, $A = \operatorname{rot} B$. Путь $B_3 \equiv 0$

$$\left.\begin{array}{l} B_3{}'_y - B_2{}'_z = A_1 \\ B_1{}'_z - B_3{}'_x = A_2 \\ B_2{}'_x - B_1{}'_y = A_3 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{rl} -B_2{}'_z = A_1 & (1) \\ B_1{}'_z = A_2 & (2) \\ B_2{}'_x - B_1{}'_y = A_3 & (3) \end{array}$$

(1)

$$B_2 \coloneqq -\int_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x, y)$$

(2)

$$B_1 \coloneqq \int_{z_0}^{z} A_2 dz$$

(3)

$$-\int_{z_0}^{z} A_1{}'_x\,dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^{z} A_z{}'_y\,dz = A_3 \underset{1}{\Longrightarrow} \int_{z_0}^{z} A_3{}'_z dz + \varphi'_x = A_3$$

$$A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x = A_3(x, y, z) \Leftrightarrow \varphi'_x = A_3(x, y, z_0)$$

Отсюда найдем $\varphi = \int_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0)\,dx$

$\square$

Примечание.

$$\int_{\partial\Omega} A_l\,dl = \int_{\partial\Omega} \langle A, l_0\rangle\,dl = \iint_{\Omega} (\operatorname{rot} A)_n\,ds$$

$$(\operatorname{rot} A)_n(a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\lambda(\Omega_\varepsilon)} \iint_{\Omega_\varepsilon} (\operatorname{rot} A)_n\,ds = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\lambda\Omega} \cdot \int_{\partial\Omega_\varepsilon} A_l\,dl$$

Лемма 1 (Урысона)**.**

- X — *нормальное*
- $F_0, F_1 \subset X$ — *замкнутые,* $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R}$ — *непрерывная,* $0 \le f \le 1$, $f\big|_{F_0} = 0$, $f\big|_{F_1} = 1$

Доказательство. Перефразируем нормальность: Если $\underset{\text{замк.}}{F} \subset \underset{\text{октр.}}{G}$, то $\exists U(F)$ — открытое:

$$F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$$

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^C \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^C}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$\overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}} \subset G_1$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}$, $G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом для любого двоично рационального числа $\alpha \in [0, 1]$ найдется множество G_α

$$f(x) \coloneqq \inf\{\alpha \text{ — двоично рациональное} \big| x \in G_\alpha\}$$

Проверим что: f — непрерывно $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(a, b)$ — всегда открыто. Достаточно проверить:

1. $\forall b$ $f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a$ $f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

Покажем это:

1. $$f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q<b \\ q \text{ — дв. рац.}}} G_q \text{ — открыто}$$

   (⊃) Очевидно: При $x \in G_q$ $f(x) \le q - b$

   (⊂) $f(x) = b_0 < b$ Возьмем $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

2. $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q>a} G_q = \bigcap_{q>a} \overline{G_q}$ — замкнуто

   (⊃) Тривиально

   (⊂) q, r — двоично рациональные

$$\bigcap_{\substack{q>a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

□

Теорема 1.3.

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_{\mathfrak{M}})$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$, $1 \le p < +\infty$ множество непрерывных финитных функций плотно

Примечание. f — финитная в $\mathbb{R}^m$ $=$ $\exists$ шар B $f = 0$ вне B. f — непрерывная финитная на $E =$ $\exists g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ $f = g\big|_E$

Доказательство. Ступенчатые функции плотны в $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$. Достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0\ \forall A \subset$ E — ограниченного, $\exists f$ — финитная непрерывная: $\|f - \mathcal{X}_A\|_p < \varepsilon$.
Как потсроить для $\forall h \in L^p$ финитную непрерывную f: $\|h - f\|_p < \varepsilon$? $\exists g$ — ступенчатая:

$$g = \sum_{\text{кон.}} a_k \mathcal{X}_{A_k} \quad \|h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

Подберем f_k: $\|f_k - \mathcal{X}_{A_k}\| < \frac{\varepsilon}{\sum |a_i| \cdot 2}$

$$\|h - f\|_p \le \|h - g\| + \|g - f\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum |a_k|\, \|\mathcal{X}_{a_k} - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{\text{замкн.}}{F} \subset A \subset \underset{\text{откр.}}{G} \quad \lambda_{\mathfrak{M}}(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона $\exists f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывная: $f\Big|_F \equiv 1$, $f\Big|_{G^C} \equiv 0$

$$\|f - \mathcal{X}_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \mathcal{X}_A|^p \, d\lambda_{\mathfrak{M}} = \int_{G \setminus F} |f - \mathcal{X}_A|^p \le 1 \cdot \lambda_{\mathfrak{M}}(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

Примечание. В $L^\infty(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$ утверждение теоремы неверно. $L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$ $B\left(\chi_{[a,b]}, \frac{1}{2}\right)$ не содержит непрерывных функций

$$\sup_{\mathbb{R}} |f - \chi_A| \ge \max(\lim_{x \to a+0} |f(x) - \chi_A|, \lim_{x \to a-0} |f(x) - \chi_A|) =$$

$$= \max(|f(a) - 1|, |f(a) - 0|) \ge \frac{1}{2}$$

Примечание. В $L^p(E, \lambda_{\mathfrak{M}})$, $p < +\infty$ плотны:

- Линейные комбинации характеристических функций ячеек
- Гладкие функции
- Рациональные линейные комбинации рациональных ячеек
- Непрерывные функции