Лекция 1

Ilya Yaroshevskiy

26 июня 2025 г.

Содержание

1 Теория меры

Лемма 1 (о структуре компактного оператора)**.** $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *— невырожденный линейный оператор, т.е.* $\det V \neq 0$
Тогда:

- $\exists$ *ортонормированные базисы* $g_1, \dots, g_m$; $h_1, \dots, h_m$
- $\exists S_1, \dots, S_m > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$ *— разложение по базису*
При этом $|\det V| = S_1 S_2 \dots S_m$

Доказательство. $W := V^* V$ $*$ — транспонирование в $\mathbb{R}^m$
W — самосопряженный оператор(матрица симметрична относительно диагонали)
Собственные числа $c_1, \dots, c_m$ — вещественные
Собственные векторы $g_1, \dots, g_m$
Заметим что:

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0 \Rightarrow c_i > 0$$

- $S_i := \sqrt{c_i}$
- $h_i := \frac{1}{S_i} V g_i$

$$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{S_i S_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{S_i S_j} \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i$$

, где δ_i — символ Кронекера (0 если $i \neq j$, 1 иначе)

$$V(x) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, g_i \rangle g_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) = \sum S_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 = \det(V^* V) = \det W = c_1 \dots c_m \tag{1}$$

1 — т.к. диагональная матрица ☐

Теорема 1.1 (преобразование меры лебега при линейном отображении)**.**

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда:

- $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$
- $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

$(\det V = 0)$ $\mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow$ мера $= 0$

$(\det V \neq 0)$ $\mu E := \lambda(V(E))$ — мера
μ — инвариантна относительно сдвигов

$$\mu(E+a) = \lambda(V(E+a)) = \lambda(V(E) + Va) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k \cdot \lambda$(Лемма из предыдущего семестра)
Q — единичный куб на векторах g_i и $V(g_i) = S_i h_i$, $V(Q) = \{\sum \alpha_i S_i h_i | \alpha_i \in [0,1]\}$ — паралеллепипед со сторонами $S_i, \dots, S_m$

□

2 Интеграл

2.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — **разбиение множества**
2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если
$\exists$ разбиение:
$$X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \ \forall i \ f\big|_{e_i} = const = c_i$$
При этом такое разбиение — **допустимое разбиение**

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X$ $\mathcal{X}_E(x) = \left[\begin{array}{ll} 1 & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{array}\right.$
2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

Замечание.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые
Тогда $\exists$ разбиения, допутимые и для f, и для g
$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \mathcal{X}_{e_i} \quad h = \sum_{\text{кон.}} b_k \mathcal{X}_{A_k}$$
$$f = \sum_{i,k} c_i \mathcal{X}_{e_i \cap A_k} \quad g = \sum b_k \cdot \mathcal{X}_{e_i \cap A_k}$$
2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$
Тогда $f + g, \ \alpha f, \ fg, \ max(f,g), \ min(f,g), \ |f|$ — ступенчатые

Определение.

- $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество функции** f
$E(f \leq a), \ E(f > a), E(f \geq a)$ — также лебеговы множества
Если f задана на X: $X(f < a), \ X(f \leq a), \dots$ — лебеговы множества

Замечание. $E(f \geq a) = E(f < a)^C$; $E(f < a) = E(f \geq a)^C$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b>a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f — **измерима на множестве** E:
$\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ — измеримо(т.е. $\in \mathfrak{A}$)

Обозначение.

- f — измерима на X — говорят просто "измерима"
- $X = \mathbb{R}^m$, мера Лебега — измеримо по Лебегу

Замечание. Эквивалентны:

1. $\forall a \quad E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a \quad E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a \quad E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a \quad E(f \geq a)$ — измеримо

Пример.

1. $E \subset X$, E — измеримо, $\mathcal{X}_E$ — измеримо

$$E(\mathcal{X}_E < a) = \left[\begin{array}{ll} \emptyset & , a < 0 \\ X \setminus E & , 0 \leq a \leq 1 \\ X & , a > 1 \end{array}\right.$$

2. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывна. Тогда f — измеримо по Лебегу

Замечание. Свойства:

1. f — измерима на E

   $\Rightarrow \ \forall a \in \mathbb{R}\ E(f = a)$ — измеримо
   $\not\Leftarrow \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \mathcal{X} + \mathcal{X}_{\text{неизм.}}$
2. f — измерима $\Rightarrow \forall \alpha \in R \quad \alpha f$ — измерима
3. f — измерима $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ — измерима на $E = \bigcup E_k$
4. f — измерима на E; $\underset{\text{изм.}}{E'} \subset E \Rightarrow f$ — измерима на E'

$$E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$$

5. $f \neq 0$ — измерима на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ — измерима на E
6. $f \geq 0$, измерима на E, $\alpha \in \mathbb{R}$. <u>Тогда</u> f^α — измерима на E

Теорема 2.1. f_n — измерима на X.
<u>Тогда</u>:

1. $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$; $\quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ — измеримы
2. $\overline{\lim} f_n$; $\quad \underline{\lim} f_n$ — измеримы

3. Если
$$\forall x \ \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = h(x)$$
, то $h(x)$ — измеримо

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$
2. $$(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf\{s_n : s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots)\}$$
3. очев.

□

2.2 Меры Лебега-Стильеса

Определение.

- $\mathbb{R}$
- $\mathcal{P}^1$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастает, непрерывна

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ-конечный объем

$$g(a + 0) = \lim_{x \to a+0} g(x)$$
$$g(a - 0) = \lim_{x \to a-0} g(x)$$
$$\mu[a, b) := g(b - 0) - g(a - 0)$$

— тоже σ-конечная мера
Применим теорему о продолжении, получим меру μg на некой σ-алгебре — **мера Лебега-Стилтьеса**

Определение. $g(x) = \lceil x \rceil$
Пусть μg определена на Борелевской σ-алгебре — **мера Бореля-Стилтьеса**