

# Лекция 10

Цуа Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

## Содержание

$q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$  — программы

1.  $q_i(j)$  не зависит
2.  $\forall$  разрешимого  $A$ ,  $A = \{j \mid q_i(j) = 1\}$  для некоторого  $i$
3.  $(i, j) \mapsto q_i(j)$  — вычислимая функция

$$L(p) = \{x \mid p(x) = 1\}$$

- $A$  — перечислимый язык
- $p_A$  — полурешитель  $A$
- $L(p_A) = A$ 
  - $L : Prog \rightarrow 2^{\Sigma^*}$
  - $L : Prog \rightarrow RE$  (Recursively Enumerable)
- $X$  — свойство языков  $X \subset RE$
- Конечные языки  $Finite \subset RE$
- Языки, содержащие  $\varepsilon$   $\underbrace{X_\varepsilon}_{prop} \subset \underbrace{RE}_{prop}$   
 $\underbrace{A}_{lang} \in \underbrace{X_\varepsilon}_{prop} \Leftrightarrow \underbrace{\varepsilon}_{string} \in \underbrace{A}_{lang}$

Посмотрим на их типы

- $*$  — `string`
- $lang$  — `set<string>`
- $prop$  — `set<lang>`

**Определение.**  $X$  — свойство перечислимых языков.

Язык свойства  $L : prop \rightarrow lang$   $L(X) = \{p \mid L(p) \in X\}$

Пример.  $L(RE) = \{p \mid L(p) \in RE\} = Prog$

---

```
1 fn q(p: Prog) -> bool {
2   return 1;
3 }
```

---

Пример.  $L(\emptyset_p) = \{p \mid L(p) \in \emptyset_p\} = \emptyset_e$

---

```
1 fn q(p: Prog) -> bool {
2   return 0;
3 }
```

---

**Теорема 0.1** (Rice, Успенский-Райс).

- $X \subset RE$
- $X \neq \emptyset$
- $X \neq RE$

Тогда  $L(X)$  не разрешим

Т.е. никакое нетривиальное свойство перечислимых языков не разрешимо.

*Доказательство.*  $X$  — нетривиальное свойство.

$\emptyset_C \notin X$

$A \in X$

$A$  разрешается  $p_A$

$L(X)$  — разрешим

$q_X$  — разрешитель  $L * X$

$$q_X(p) = \begin{cases} 1 & L(p) \in X \\ 0 & L(p) \notin X \end{cases}$$

---

```

1 fn c() {
2     loop {
3         q_x(c) = 0;
4         q_x(p_A) = 1;
5     }
6 }
```

---

```

1 fn a(p: Prog, x: Word) {
2     let s = ""
3     fn s(y: Word) {
4         if p(x) == 1 {
5             return p_A(y);
6         } else {
7             loop { };
8         }
9     };
10    return q_X(s);
11 }
```

---

$$p(x) = 1 \implies \forall y s(y) = p_A(y) \implies L(s) = L(p_A) = A \in X \implies q_X(s) = 1$$

$$p(x) \neq 1 \implies \forall y s(y) \text{ зависит} \implies L(s) = \emptyset_e \notin X \implies q_X(s) = 0$$

□

**Определение.**  $HALT = \{p \mid p \text{ останавливается на } \varepsilon\}$

**Определение.**  $m$ -сведение mapping (many-to-one).

- $A, B$  — языки

$A \leq_m B$  —  $A$  сводится к языку  $B$ , если существует всюду определенная вычислимая функция  $f$ :  
 $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$

**Лемма 1.**  $A \leq_m B$ ,  $B$  разрешим  $\implies A$  разрешим

---

```

1 fn inA(x: Word) {
2     return inB(f(x));
3 }
```

---

**Лемма 2.**  $A \leq_m B$ ,  $A$  неразрешим  $\implies B$  неразрешим