

# Лекция 6

Цуя Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

## Содержание

<b>1 Помеченные КО и экспоненциальные производящие функции</b>	<b>1</b>
1.1 Помеченные объекты	2
1.2 Операции	2
1.2.1 Дизъюнктивное объединение (сумма)	2
1.2.2 Пара (произведение)	2
1.2.3 Последовательность	2
1.2.4 Множества (Set)	3
1.2.5 Циклы	3
1.3 Обобщение	3

## 1 Помеченные КО и экспоненциальные производящие функции

$$a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ \dots \quad A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

**Определение.** Экспоненциальная производящая функция:

$$a(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot t + \frac{a_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

**Обозначение.** Мы будем обозначать ЭПФ так-же большой буквой

*Пример.* 1, 1, 1, 1, , 1, 1, 1, 1, 1

**ОПФ**  $\frac{1}{1-t}$

**ЭПФ**  $1 + 1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot t^n = e^t = \exp(t)$

*Пример.* 1, 1, 2, 6, 24, ..., n!, ...  $a_n = n!$

**ОПФ**  $1 + t + 2 \cdot t^2 + 6 \cdot t^3 + \dots + n! \cdot t^n + \dots$

**ЭПФ**  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n!} \cdot t^n = \frac{1}{1-t}$

$$A(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} \cdot t + \frac{a_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

$$B(t) = \frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!} \cdot t + \frac{b_2}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{b_n}{n!} \cdot t^n + \dots$$

**Свойство 1.**

$$C(t) = A(t) \pm B(t) \quad c_n = a_n \pm b_n$$

**Свойство 2.**

$$C(t) = a(t) \cdot B(t)$$

$$\frac{C_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

**Свойство 3.**

$$C(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k} + b_0 c_n$$

$$c_n = \frac{a - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k}}{b_0}$$

Далее все производящие функции — экспоненциальные, а объекты помечены

**1.1 Помеченные объекты**

*Пример.* Перестановки.  $P_n = n!$  — количество перестановок из  $n$  элементов

*Пример.* Пустые графы.  $E_n = 1$  — количество графов с  $n$  вершинами

ЭПФ:  $\exp(t)$

*Пример.* Циклы.  $C_n = (n-1)!$  — количество циклов из  $n$  вершин. Направление обхода фиксировано.

ЭПФ:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}$

**1.2 Операции****1.2.1 Дизъюнктное объединение (сумма)**

- $A$
- $B$
- $A \cap B = \emptyset$
- $C = A \cup B$

$$c_n = a_n + b_n \quad C(t) = A(t) + B(t)$$

**1.2.2 Пара (произведение)**

- $A$
- $B$
- $C = A \times B$

$$C = \{ \{ \underbrace{a}_{k \text{ атомов}}, \underbrace{b}_{n-k \text{ атомов}} \} \}$$

Получим последовательность  $c_1 c_2 \dots c_n$ . Перенумеруем элементы:

Первые  $k$  в  $d_1 d_2 \dots d_k$ , где  $d_i = |\{c_j | 1 \leq j \leq k, c_k \leq c_i\}|$ .

А остальные  $c_{k+1} \dots c_n$  в  $e_1 \dots e_{n-k}$ , где  $e_i = |\{c_j | k+1 \leq j \leq n, c_j \leq c_{i+k}\}|$ .

Пусть  $d_i = a_i$ , а  $e_i = b_i$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \quad C(t) = A(t) \cdot B(t)$$

*Пример.* Пары перестановок.  $C(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ . Тогда  $c_n = (n+1)n!$

**1.2.3 Последовательность**

$$C = \text{Seq } A = \emptyset + A \times \text{Seq } A$$

$$C(t) = 1 + A(t) \cdot C(t)$$

$$C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$

*Пример.*

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$
- $\text{Seq } U = P$

$$P(t) = \frac{1}{1-t}$$

### 1.2.4 Множества (Set)

- $\text{Set}_k A$  — множества, содержащие  $k$  объектов

$$B_k = \text{Seq}_k A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k \quad B_k(t) = A(t)^k$$

$$\text{Set}_k A = \text{Seq}_k A / \sim$$

$[x_1 x_2 \dots x_k] \sim [y_1 y_2 \dots y_k]$ .  $\exists$  перестановка  $\pi : x_i = y_{\pi[i]}$

$$C_k(t) = \frac{1}{k!} \quad B_k(t) = \frac{A(t)^k}{k!}$$

$$\text{Set } A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Set}_k A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(t)^k}{k!} = e^{A(t)}$$

*Пример.*

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$

$$\text{Set } U = E \quad E(t) = e^t$$

, где  $E$  — пустые графы

*Пример.* Циклы.

- $U = \{\circ\}$
- $U(t) = t$
- $B = \text{Set Cyc } U$

$$B(t) = e^{C(t)} = e^{\ln \frac{1}{1-t}} = \frac{1}{1-t}$$

Набор помеченных циклов является перестановкой

### 1.2.5 Циклы

- $\text{Cyc}_k A$  — количество циклов длины  $k$

$$C = \text{Cyc}_k A = \text{Seq}_k A / \sim$$

, где классы эквивалентности с точностью до циклических сдвигов.

$[x_1 \dots x_k] \sim [y_1 \dots y_k]$ .  $\exists i : x_j = y_{(i+j) \bmod k+1}$

$$\text{Cyc } U = \ln \frac{1}{1-t}$$

$$C_k(t) = \frac{1}{k} A(t)^k$$

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A(t)^k = \ln \frac{1}{1-A(t)}$$

$$\text{Set Cyc } U = P$$

$$\text{Set Cyc } A \simeq \text{Seq } A$$

## 1.3 Обобщение

**Теорема 1.1** (о подстановке).

- $A$  — помеченные КО —  $A(t)$
- $B$  — помеченные КО —  $B(t)$

$C = A[B]$  — вместо каждого атома  $A$  подставляем КО  $B$ , перенумеруем получившиеся атомы произвольным образом

$$C(t) = A(B(t))$$

*Пример.*  $A \times A$  — пара атомов. Их две  $B(t) = t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2$ . Подставляем  $B(A(t)) = A(t)^2$