Лекция 5

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Производящие функции для регулярных языков

L — регулярный язык

$$|L \cap \Sigma^n| = a_n$$

$$L(t) = a_0 + a_1 t + \dots$$

Примечание. L — регулярная спецификация
ψ — регулярное выражение:

1. $L(\psi) = L$
2. $\forall x \in Ł\ \exists!$ способ x удовлетворяющий ψ

Лемма 1. *Σ — конечный алфавит, $L \subset \Sigma^*$*
L — регулярная спецификация $\Leftrightarrow$ L получаетя из Σ:

1. *Дизъюнктное объединение $+$*
2. *Прямое произведение $\times$*
3. *Последовательность Seq*

Доказательство. Общее рассждение: по индукции рассмотрим для каждой операции во что она перейдет, надо показать что единственность вывода сохраняется Не работает ☐

Пример.

$$ab^*|a^*b$$

$$a \times \text{Seq } b | \text{Seq } a \times b$$

объединение дизъюнктное? $\Rightarrow$ не регелярная спецификация

Пример.

$$(ab^*)^*$$

$$\text{Seq}(a \times \text{Seq } b)$$

Теорема 1.1. Если у L есть регулярная спецификация, то L — дробно рациональная

Теорема 1.2 (Производящая функция регулярного языка)**.** L — регулярный язык над Σ, ДКА A:

- Состояния Q, $|Q| = n$
- $s \in Q$ — стартовое сотояние
- $T \subset Q$ — терминальные

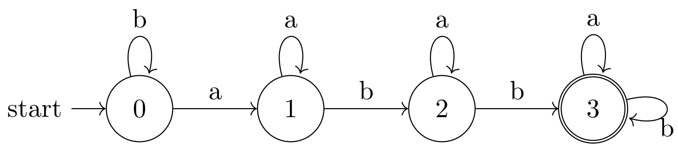
$$u = (\overbrace{0, 0, \dots, \underbrace{1}_{s}, 0, \dots, 0}^{n})$$

$$v = (\overbrace{0, \underbrace{1}_{\in T}, 0, \underbrace{1}_{\in T}, \dots, \underbrace{1}_{\in T}, 0}^{n})$$

$$D = (d_{ij})^T,\ d_{ij} = |\{c | i \xrightarrow{c} j\}|$$

$$L(t) = \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v}$$

Пример. Язык из слов, которые содержат abb как подстроку



$$\begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)}$$

2 Автомат КМП и автокор. многочлен

Конструкция Гуибаса-Одлызко

$$p = \boxed{\mathrm{p}_1, p_2, \dots, p_k}$$

$$c_i = [p[i+1 \dots k] = p[1 \dots k-i]]$$

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{k-1} t^{k-1}$$

Пример. $p = \mathrm{aabbaa}$
$c = (1, 0, 0, 0, 1, 1)$
$c(t) = 1 + t^4 + t^5$

Теорема 2.1.

- $\Sigma,\ |\Sigma| = m$

S_n — количество слов длины n, не содержащих p

$$S(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \dots$$

$$S(t) = \frac{c(t)}{t^k + (1-mt)c(t)}$$

Пример. $p = \mathrm{abb}$

$$c(t) = 1$$

$$\frac{1}{t^3 + (1-2t) \cdot 1} = \frac{1}{1 - 2t + t^3}$$

2.1 Пентагональная формула Эйлера

$$p_0\ p_1\ p_2\ \dots\ p_n\ \dots$$

p_n — количество разбиений n на слагаемые из $\mathbb{N}$. Порядок не важен

- $U = \{0\},\ u_1 = 1,\ U(t) = t$
- $N = \text{Seq}^+ U =$положительно целые числа
- $P = \text{MSet}\ N$

$$P(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}$$

$$Q(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-t^k)$$

$$R(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+t^k)\ [t^n]R \to r_n$$

r_n — количество разбиений на различные слагаемые

$$[t^n]Q = \sum_{\substack{\text{разбиение } n \text{ на} \\ \text{различные слагаемые}}} (-1)^{\text{число слагаемых}}$$

$$q_n = e_n - o_n$$

e_n — число разбиений на четное число различных слагаемы, o_n — число разбиений на нечетное число различных слагаемы,

Теорема 2.2.

$$Q(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (t^{\frac{3k^2-k}{2}} + t^{\frac{3k^2+k}{2}})$$

Лемма 2.

$$n \neq \frac{ek^2 \pm k}{2}, \textit{то } e_n = o_n$$

$$n = \frac{ek^2 \pm k}{2}, \textit{то } e_n = o_n + (-1)^k$$