

Лекция 4

Пяа Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Производящие функции для объектов

1

1 Производящие функции для объектов

- Оюъединение

$$A, B \quad A \cap B = \emptyset \quad C = A \cup B \\ A(t) \quad B(t)$$

$$C(t) = A(t) + B(t) \\ c_n = a_n + b_n$$

- Пара

$$C = A \times B \quad \text{Pair}(A, B)$$

$$C(t) = A(t) \cdot B(t) \\ c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

- Последовательности

$$C = \text{Seq } A = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots \quad a_0 = 0$$

$$C(t) = 1 + A(t) + A(t) \cdot A(t) + A(t)^3 + \dots \\ C(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$$

- Множества

ε вес 0

$$\text{Set } A = \times_{a \in A} (\varepsilon \cup a)$$

$$C(t) = \prod_{a \in A} (1 + t^{\omega(a)}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + t^k)^{a_k}$$

Пример. $\text{Set} \{\square, \boxplus\}$ $a_1 = 1, a_2 = 1$

$$C(t) = (1 + t)(1 + t^2) = t^3 + t^2 + t + 1$$

- Мультимножества

$$\text{MSet } A = \times_{a \in A} (\varepsilon \cup a \cup a^2 \cup \dots) = \prod_{a \in A} \text{Seq}\{a\}$$

$$C(t) = \prod_{a \in A} \frac{1}{1 - t^{\omega a}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - t^k} \right)^{a_k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)^{-a_k}$$

Пример. $\text{MSet}\{\square, \boxplus\}$

$$C(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{1}{(1-t^2)(1+t)} \\ c_n = dn + e + f \cdot (-1)^n$$

Пример. $\text{Seq}_{=k}(A) = A^k$ — ровно k элемента

$$\text{Seq}_{\geq k}(A) = A^k \times \text{Seq}(A) \frac{A(t)^k}{1 - A(t)}$$

$$\text{Seq}_{\leq k}(A) = \frac{1}{1 - A(t)} - \frac{A(t)^{k+1}}{1 - A(t)} = \frac{1 - A(t)^{k+1}}{1 - A(t)}$$