

Лекция 2

Луа Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1 Производящие функции	1
1.1 Рекуррентные соотношения	1
1.2 Рекуррента в рациональную ПФ	2

1 Производящие функции

Определение. Полином — степенной ряд, у которого начиная с некоторого места n все коэффициенты 0.

Обозначение. $\deg p = n$

Определение. $\frac{P(t)}{Q(t)}$ — дробно рациональная функция

1.1 Рекуррентные соотношения

Определение.

$$m : a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$$

$$k \leq m, n \geq m$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$$

, где c_1, \dots, c_k — коэффициенты рекуррентности

Пример.

- $m = 2, k = 2$
- $f_0 = f_1 = 1$
- $c_1 = c_2 = 1$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ — числа Фибоначи

Определение. Квазиполином

$$f(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n) r_i^n$$

, где p_i — полином, r_i — числа

Теорема 1.1. • $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

Тогда эквивалентны:

1. $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, P, Q — полиномы, $q_0 \neq 0$

2. для $n \geq m$ a_n задается линейным рекуррентным соотношением: $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$, причем:

- $Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$
- $\deg P \leq m - 1$

3. a_n — квазиполином

$$a_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) r_i^n \quad (1)$$

причем:

- r_i — обратные величины корням $Q(t)$
- k — число различных его корней
- $\deg p_i = (\text{кратность корня}(r_i^{-1})) - 1$
(1 кроме $\leq m$ первых членов)

1.2 Рекурента в рациональную ПФ

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

$$m = \deg P + 1 \quad k = \deg Q$$

$$p_i = a_i - \sum_{j=1}^{\min(k,i)} a_{i-j} c_j$$

$$a_n = \frac{p_n - \sum_{i=1}^n a_{n-i} q_i}{q_0}$$

$$c_i = -q_i$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{\min(n,k)} c_i a_{n-i} [+p \text{ если } n < m]$$