

# Лекция 1

Луа Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

## Содержание

### 1 Производящие функции

1

## 1 Производящие функции

Последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Запишем в виде ряда

$$A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$$

, где  $A(t)$  — производящая функция

### Свойство 1.

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$
- $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots$

$$A(t) + B(t) = C(t)$$

$$c_n = a_n + b_n$$

$$C(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots$$

### Свойство 2.

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$
- $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots$

$$A(t) \cdot B(t) = C(t)$$

$$(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1t + b_2t^2) =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + \dots$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$C(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots$$

### Свойство 3.

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$
- $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots, b_0 \neq 0$

$$\frac{A(t)}{B(t)} = C(t)$$

$$C(t) \cdot B(t) = A(t)$$

$$c_n = a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k}$$

Если  $b_0 = 1$  и  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ , то  $c_i \in \mathbb{Z}$

**Свойство 4.**

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$

$$A'(t) = a_1 + 2 \cdot a_2t + 3 \cdot a_3t^2 + \dots$$

$$a'_n = n \cdot a_n t^{n-1}$$

**Свойство 5.**

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$

$$\int A(t) = a_0t + \frac{1}{2}a_1t^2 + \frac{1}{3}a_2t^3 + \dots$$

$$a'_n = \frac{1}{n+1} \cdot a_n t^{n+1}$$

**Свойство 6.**

- $A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$

- $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots, b_0 = 0$

$$C(t) = A(B(t))$$

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_i \sum_{n=k_1+k_2+\dots+k_i} \prod_{j=1}^i b_{k_j}$$