

## Задания 112-147

Луа Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

116

$$\begin{aligned}\sigma_1(n) &= \sum_{d|n} d \\ \zeta(s-1) : a_n &= n \\ \zeta(s-1) \cdot \zeta(s) : a_n &= \sum_{d|n} a_d \cdot b_{\frac{n}{d}} = \sum_{d|n} d \cdot 1 = \sum_{d|n} d^1 = \sigma_1(n)\end{aligned}$$

117

$$\begin{aligned}\zeta(s-k) : a_n &= n^k \\ \zeta(s-k) \cdot \zeta(s) : a_n &= \sum_{d|n} a_d \cdot b_{\frac{n}{d}} = \sum_{d|n} d^k = \sigma_k(n)\end{aligned}$$

118

$$\begin{aligned}\zeta\left(s - \frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{n}}{n^s} \\ a_n &= \sqrt{n}\end{aligned}$$

119

$$A(s) = \zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2)^s}$$

121

$$\begin{aligned}C(s) = -A'(s) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^s}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (n^{-s})' = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} -a_n \cdot \ln n \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ln n}{n^s}\end{aligned}$$

133

- $A, B$  — перечислимые языки
- $a, b$  — программы для  $A, B$

Сделаем программу  $p$  которая выводит каждое слово из языка  $A \cup B$  хотябы один раз.

---

**Program  $p$** 


---

```

for  $t \leftarrow [0..]$  do
   $a()|_{TL=t}$ 
   $b()|_{TL=t}$ 
  for  $w \leftarrow (\Sigma^*)[1..t]$  do
    if  $w \in a.out$  or  $w \in b.out$  then
      print( $w$ )
    end if
  end for
end for

```

---

## 134

---

```

1 def p():
2   for t in [0..]:
3     a().wait(t)
4     b().wait(t)
5     for w in sigma[0..t]:
6       if w in a.out and w.out in wb:
7         print(w)
8

```

---

## 135

---

```

1 def p():
2   for t in [0..]:
3     for w1 in sigma[0..t]:
4       for w2 in sigma[0..t]:
5         if inA(w1).wait(t) and inB(w2).wait(t):
6           print(w1 + w2)

```

---

## 136

$L$  — перечислим  $\implies L^n$  — перечислим  $\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$  — перечислим  
 Почему  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , где  $A_i$  — перечислим перечислим?  
 Пусть не перечислим, значит  $\exists w \in L, \forall t p|_{TL=t}$  не выводит  $w$

## 137

---

```

1 def p((w1, w2)):
2   return p1(w1) and p2(w2)

```

---

## 138

Пусть  $A$  — перечислимый язык пар, тогда  $\exists in A$  — полурешитель  $A$ .

---

**Program**  $\text{inX}(w_1)$ 


---

```

for  $t \leftarrow [0..]$  do
  for  $w_2 \leftarrow \Sigma^*[1..t]$  do
    if  $\text{inA}|_{\text{TL}=t}(\langle w_1, w_2 \rangle)$  then
      return true
    end if
  end for
end for

```

---

$\text{inX}$  — полуразрешитель проекции  $A$  на  $X$  — множество первых элементов пары.

## 139

Универсальный язык

## 141

Сделаем перечислитель образа из полуразрешителя прообраза только будем выводить  $f(x)$ .  
 $f : A \rightarrow B$ ,  $pf$  — вычисляет  $f$ ,  $\text{inA}$  — полуразрешитель  $A$

---

```

1 def  $\text{pB}()$ :
2   for  $t$  in  $[0..]$ :
3     for  $w$  in  $\text{sigma}[0..t]$ :
4       if  $\text{inA}(w)$ .wait( $t$ ):
5         print( $\text{pf}(w)$ )

```

---

## 142????

$f : A \rightarrow B$ ,  $pf$  — вычисляет  $f$ ,  $\text{inB}$  — полуразрешитель  $B$

---

```

1 def  $\text{inA}(w)$ :
2   return  $\text{inB}(pf(w))$ 

```

---

## 148

Пусть  $B$  перечислимо, тогда  $\exists \text{inB}$  — полуразрешитель  $B$

---

```

1 def  $\text{inA}(w)$ :
2   return  $\text{inB}(f(w))$ 

```

---

Это полуразрешитель  $A$ , тогда как  $A$  неперечислимо — противоречие  $\Rightarrow B$  — неперечислимо

## 149

$\mathbb{N} \setminus A \equiv \bar{A} \leq_m A$  и  $A$  — перечислимо, значит  $\exists \text{inA}$  — полуразрешитель  $A$  и  $\exists f : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$  — вычислимая

---

 $\text{inCA}(w)$ 


---

```

return  $\text{inA}(f(w))$ 

```

---

$\text{inCA}$  — полуразрешитель  $\bar{A} \Rightarrow \bar{A}$  — полуразрешим.  
 $A$  и  $\bar{A}$  оба полуразрешимы  $\Rightarrow A$  — разрешим

## 154

Докажем полурешимость::

---

```
1 def pFinite(p):  
2   return p(x_1) or p(x_2) or ... or p(x_n)
```

---

Пусть свойство языков с конечным числом слов  $x_1, \dots, x_n$  —  $\text{Finite} = \{\{x_1, \dots, x_n\}\}$ , тогда  $\text{Finite} \subset \text{RE}$  и по теореме Райса  $\text{Finite}$  не разрешим