

# Вопросы к экзамену

Цуя Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Определения и формулировки</b>	<b>3</b>
1.1	Мультииндекс и обозначения с ним	3
1.2	#A Формула Тейлора (различные виды записи)	3
1.3	$n$ -й дифференциал	3
1.4	#A Норма линейного оператора	3
1.5	Положительно-, отрицательно-, знако- определенная квадратичная форма	3
1.6	Локальный максимум, минимум, экстремум	4
1.7	Диффеоморфизм	4
1.8	Формулировка теоремы о локальной обратимости	4
1.9	Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений	4
1.10	Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений	4
1.11	#A Простое $k$ - мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$	4
1.12	Касательное пространство к $k$ - мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$	5
1.13	Относительный локальный максимум, минимум, экстремум	5
1.14	#A Формулировка достаточного условия относительного экстремума	5
1.15	Поточечная сходимость последовательности функций на множестве	5
1.16	#A Равномерная сходимость последовательности функций на множестве	5
1.17	Равномерная сходимость функционального ряда	6
1.18	Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости	6
1.19	#A Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара	6
1.20	Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда	6
1.21	Кусочно-гладкий путь	6
1.22	Векторное поле	6
1.23	Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути	6
1.24	#A Потенциал, потенциальное векторное поле	7
1.25	Локально потенциальное векторное поле	7
1.26	Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути	7
1.27	Гомотопия путей связанная и петельная	7
1.28	Односвязная область	7
1.29	#A Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра	8
1.30	#A Объем	8
1.31	#A Ячейка	8
1.32	Классический объем в $\mathbb{R}^m$	8
1.33	Формулировка теорема о непрерывности снизу	9
1.34	#A Мера, пространство с мерой	9
1.35	Полная мера	9
1.36	#A Сигма-конечная мера	9
1.37	Дискретная мера	9
1.38	Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры	9
1.39	#A Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество	10
1.40	Борелевская сигма-алгебра	10
1.41	<b>TODO</b> Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов	10

<b>2</b>	<b>Теоремы</b>	<b>10</b>
2.1	Лемма о дифференцировании сдвига . . . . .	10
2.2	#A Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано) . . . . .	10
2.3	Теорема о пространстве линейных отображений . . . . .	11
2.4	Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора . . . . .	11
2.5	Теорема Лагранжа для отображений . . . . .	12
2.6	Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому . . . . .	12
2.7	Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях . . . . .	13
2.8	Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля . . . . .	13
2.9	Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах . . . . .	13
2.10	#A Достаточное условие экстремума . . . . .	14
2.11	Лемма о почти локальной инъективности . . . . .	15
2.12	Теорема о сохранении области . . . . .	15
2.13	Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности . . . . .	15
2.14	Теорема о гладкости обратного отображения . . . . .	16
2.15	#A Теорема о неявном отображении . . . . .	16
2.16	Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений . . . . .	17
2.17	Следствие о двух параметризациях . . . . .	18
2.18	Лемма о корректности определения касательного пространства . . . . .	18
2.19	Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей . . . . .	18
2.20	Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня . . . . .	19
2.21	#A Необходимое условие относительного локального экстремума . . . . .	19
2.22	Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел . . . . .	19
2.23	#A Теорема Стокса–Зайделя о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов . . . . .	20
2.24	Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота . . . . .	20
2.25	Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов . . . . .	20
2.26	Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру . . . . .	21
2.27	Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда . . . . .	21
2.28	#A Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	22
2.29	FIXME Дифференцируемость гамма функции . . . . .	22
2.30	Теорема о предельном переходе в суммах. . . . .	23
2.31	Теорема о перестановке двух предельных переходов . . . . .	24
2.32	#A Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда . . . . .	24
2.33	Теорема о круге сходимости степенного ряда . . . . .	25
2.34	Теорема о непрерывности степенного ряда . . . . .	25
2.35	Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример. . . . .	26
2.36	Свойства экспоненты . . . . .	27
2.37	Метод Абеля суммирования рядов. Следствие . . . . .	28
2.38	Единственность разложения функции в ряд . . . . .	28
2.39	Разложение бинома в ряд Тейлора . . . . .	29
2.40	Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора . . . . .	29
2.41	Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути . . . . .	30
2.42	#A Обобщенная формула Ньютона–Лейбница . . . . .	31
2.43	Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов . . . . .	31
2.44	FIXME #A Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре . . . . .	32
2.45	Лемма о гусенице . . . . .	33
2.46	Лемма о равенстве интегралов по похожим путям . . . . .	33
2.47	Лемма о похожести путей, близких к данному . . . . .	34
2.48	Равенство интегралов по гомотопным путям . . . . .	34
2.49	#A Теорема Пуанкаре для односвязной области . . . . .	35
2.50	Теорема о веревочке . . . . .	35
2.51	Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность . . . . .	36
2.52	Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности . . . . .	37
2.53	Теоремы о непрерывности сверху . . . . .	37
2.54	Счетная аддитивность классического объема . . . . .	38
2.55	Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0 . . . . .	38
2.56	Пример неизмеримого по Лебегу множества . . . . .	39

2.57	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">#A</span> Регулярность меры Лебега . . . . .	39
2.58	Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении . . . . .	39
2.59	Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов . . . . .	40
2.60	Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании . . . . .	40

# 1 Определения и формулировки

## 1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Обозначение.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m = \sum_{c_1=1}^m \sum_{c_2=1}^m \dots \sum_{c_n=1}^m a_{c_1} a_{c_2} \dots a_{c_n} \quad (1)$$

$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$  — мультииндекс

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R}^m \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \quad (3)$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! \quad (4)$$

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} \quad (5)$$

$$(1) = \sum_{\alpha: |\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha \quad (6)$$

## 1.2 #A Формула Тейлора (различные виды записи)

Смотри [формула Тейлора](#)

## 1.3 $n$ - й дифференциал

Смотри [однородный многочлен степени  \$k\$](#) , в доказательстве

*Примечание.*  $d^2 f = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + f''_{x_2 x_2}(a) h_2^2 + \dots + f''_{x_m x_m}(a) h_m^2 + 2 \sum_{i < j} f''_{x_i x_j}(a) h_i h_j$   $d^{k+1} f = d(d^k f)$

$$df = f'_{x_1} h_1 + f'_{x_2} h_2 + \dots + f'_{x_m} h_m$$

$$d^2 f = (f''_{x_1 x_1} h_1 + f''_{x_1 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_1 x_m} h_m) h_1 + (f''_{x_2 x_1} h_1 + f''_{x_2 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_2 x_m} h_m) h_2 + \dots$$

## 1.4 #A Норма линейного оператора

**Определение.**  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  - множество линейных отображений  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  - это линейное пространство

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^m: |x|=1} |Ax|$$

## 1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

**Определение.**  $Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} h_i h_j$$

- Положительно определенная квадратичная форма  $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

*Пример.*  $Q(h) = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_m^2$

- Отрицательно определенная квадратичная форма  $\forall h \neq 0 \quad Q(h) < 0$

- Незнакоопределенная квадратичная форма  $\exists \bar{h} \quad Q(\bar{h}) < 0 \quad \exists \bar{\bar{h}} \quad Q(\bar{\bar{h}}) > 0$

*Пример.*  $Q(h) = h_1^2 - h_2^2$

- Полуопределенная (положительно определенная вырожденная)  $\exists \bar{h} \neq 0: Q(\bar{h}) = 0$

*Пример.*  $Q(h) = h_1^2 \quad Q((0, 1, 1, \dots)) = 0$

## 1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

**Определение.**  $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$   $a \in E$

$a$  - точка локального максимума:  $\exists U(a) \subset E \forall x \in U(a) f(x) \leq f(a)$  (аналогично для минимума)  
 экстремум - максимум или минимум

## 1.7 Диффеоморфизм

**Определение.** Область - открытое связное множество

**Определение.**  $F : \underbrace{O}_{\text{обл.}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - диффеоморфизм если

1.  $F$  — обратимо
2.  $F$  — дифференцируемое
3.  $F^{-1}$  — дифференцируемое

## 1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

**Теорема 1.1.**  $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$   $x_0 \in O$   $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists U(x_0)$   $T|_U$  - диффеоморфизм

## 1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

**Теорема 1.2.** Формулировка в терминах системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть  $(x^0, y^0)$  - ее решение  $f \in C^r$

$\det F'(x^0) \neq 0$   $F = (f_1 \dots f_m)$

Тогда  $\exists U(y^0) \forall y \in U(y^0)$  система имеет решение и эти решения  $C^r$ -гладко зависят от  $y$

## 1.10 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

**Теорема 1.3.** В терминах систем уравнений

$f_i \in C^r$ ,  $(a, b)$  — решение системы:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

Допустим  $\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=1 \dots n} \neq 0$

Тогда  $\exists U(a)$  - откр.,  $\exists! \Phi$

такие что  $\forall x \in U(a)$   $(x, \Phi(x))$  — также решение системы

## 1.11 $\#A$ Простое $k$ - мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

**Определение.**  $M \subset \mathbb{R}^m$  - простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$

$\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$   $\Phi(O) = M$   $\Phi : O \rightarrow M$  - гомеоморфизм

$\Phi \in C^r$   $\forall x \in O$   $\text{rank } \Phi'(x) = k$  — максимально возможное значение

### 1.12 Касательное пространство к $k$ - мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

**Лемма 1.**  $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^r$ -гладкое - параметризация многообразия  $U(p) \cap M$ , где  $p \in M$ ,  $M$  - гладкое  $k$ -мерное многообразие,  $\Phi(t^0) = p$   
Тогда образ  $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  есть  $k$ -мерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ . Оно не зависит от  $\Phi$

**Определение.**  $\Phi'(t^0)$  — касательное пространство к  $M$  в точке  $p$

**Обозначение.**  $T_p M$

### 1.13 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

**Определение.**  $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$   $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$

$M_\Phi \subset O := \{x | \Phi(x) = 0\}$

$x_0 \in M_\Phi$ , т.е.  $\Phi(x_0) = 0$

$x_0$  - точка локального относительного max, min, строгого max, строгого min

Если  $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$

$\forall x \in U \cap M_\Phi$  (т.е.  $\Phi(x) = 0$ )  $f(x_0) \geq f(x)$  (для максимума)

т.е.  $x_0$  - локальный экстремум  $f|_{M_\Phi}$

Уравнения  $\Phi(x) = 0$  - уравнения связи

### 1.14 #A Формулировка достаточного условия относительного экстремума

**Определение.**  $G := f - \lambda_1 \Phi_1 - \lambda_2 \Phi_2 - \dots - \lambda_n \Phi_n$  - Функция Лагранжа

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - множители Лагранжа

$$\begin{cases} G' = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \text{- то что в теореме}$$

**Теорема 1.4** (О достаточном условии экстремума). Пусть выполнено условие для точки  $a$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ : если  $\Phi'(a)h = 0$  ( $n$  уравнений с  $m+n$  неизвестными)

То можно выразить  $h_y = \Psi(h_x)$  (решим линейную систему)

Рассмотрим квадратичную форму  $Q(h_x) = d^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$ , где  $G$  - функция Лагранжа

$Q$  - это сужение  $d^2 G$  на касательное пространство  $T_a M_\Phi$

Тогда:

1.  $Q$  - положительно опр.  $\Rightarrow a$  - точка минимума
2.  $Q$  - отрицательно опр.  $\Rightarrow a$  - точка максимума
3.  $Q$  - неопределена  $\Rightarrow$  нет экстремума
4.  $Q \geq 0$  вырождена  $\Rightarrow$  информации недостаточно

### 1.15 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

**Определение.** Последовательность функций

$\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$   $n \mapsto f_n$

**Определение.** Последовательность  $f_n$  сходится поточечно к  $f$  на множестве  $E, \forall x \in E f_n(x) \rightarrow f(x)$

$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

### 1.16 #A Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

**Определение.**  $f_n$  равномерно сходится к  $f$  на  $E \subset X$  если  $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N 0 \leq M_n < \varepsilon$ , т.е.  $\forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

**Обозначение.**  $f_n \xrightarrow[E]{} f$

### 1.17 Равномерная сходимость функционального ряда

**Определение.**  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  сходится к  $S(x)$  равномерно на  $E \subset X$ :  $S_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\Rightarrow} S$  на  $E$

### 1.18 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

**Определение.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in E \quad |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$   
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$

### 1.19 #А Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

**Определение** (степенной ряд).  $z_0, a, z \in \mathbb{C} \quad \underbrace{\sum a_n(z - z_0)^n}_{\text{степенной ряд}}$  число  $R = \underbrace{\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}_{\text{формула Адамара}}$  — называется радиусом сходимости степенного ряда

### 1.20 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

признак Абеля

$$\sum a_n(x)b_n(x) \quad a_n \in \mathbb{C} \quad b_n \in \mathbb{R}$$

1.  $\sum a_n(x)$  равномерно сходится на  $\langle \alpha, \beta \rangle$
2.  $\forall x \quad b_n(x)$  — монотонна по  $n$   
 $b_n(x)$  — равномерно ограничена  $\exists C_b : \forall n \forall x \quad |b_n(x)| \leq C_b$

Тогда ряд сходится

### 1.21 Кусочно-гладкий путь

**Определение.** Путь  $\gamma$  - кусочно гладкий

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

$\gamma$  - дифф. на  $(t_k, t_{k+1}) \forall k, 0 \leq k \leq n - 1$

$\exists$  односторонние производные в точках  $t_i$

можно считать  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  - гладкое отображение

### 1.22 Векторное поле

**Определение.** Векторное поле:  $V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - непрерывное

$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$  - вектор приложенный к точке  $x$

### 1.23 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

**Определение** (Интеграл векторного поля по кусочно гладкому пути).

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt = \int_a^b V_1 d\gamma_1 + V_2 d\gamma_2 + \dots + V_m d\gamma_m$$

Используется обозначение  $I(V, \gamma) = \int_{\gamma} V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m$  — аналогично последнему выражению в равенстве

Второе выражение в равенстве запишем так:  $\sum_{k=1}^n \langle V(\gamma(\xi_k)), \gamma'(\xi_k) \rangle \cdot (t_k - t_{k-1})$ , где  $\xi_k$  - точки оснащения

$$= \sum \underbrace{\langle V(\gamma(\xi_k)), \frac{\gamma'(\xi_k)}{|\gamma'(\xi_k)|} \rangle}_{\text{проекция силы на касательное направление}} \cdot \underbrace{|\gamma'(\xi_k)| \cdot (t_k - t_{k-1})}_{\text{пройденный путь}}$$

### 1.24 #А Потенциал, потенциальное векторное поле

**Определение.**  $V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - в поле

$V$  - **потенциально**, если оно имеет потенциал

$\exists \underbrace{f}_{\text{потенциал}} \in C^1(O) : \text{grad } f = V$  в области  $O$

### 1.25 Локально потенциальное векторное поле

**Определение.**  $V$  - локально потенциальное векторное поле в  $O$ , если  $\forall x \in O \exists U(x)$   $V$  потенциально в  $U(x)$

### 1.26 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

**Определение.** Интеграл локально потенциального векторного поля  $V$  по непрерывному пути  $\gamma$

Возьмем  $\delta > 0$  из Леммы 3

Пусть  $\tilde{\gamma} - \delta$  - близкий кусочно гладкий путь, т.е.  $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$

Полагаем:  $I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$

Следует из Леммы 3 и Леммы 2

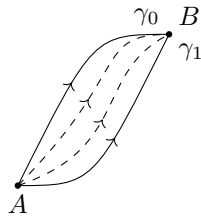
### 1.27 Гомотопия путей связанная и петельная

**Определение** (Гомотопия двух путей).  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$  — непрерывны

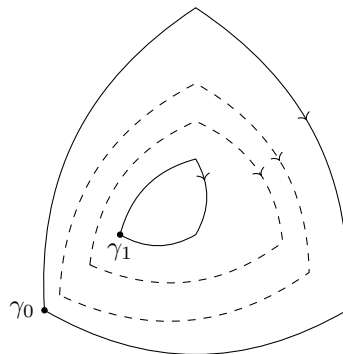
$\Gamma : [a, b] \times [0, 1]$  - непрерывное, такое что:

$$\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$$

- Гомотопия связанная, если  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \gamma_0(b) = \gamma_1(b), \forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_0(b)$



- Гомотопия петельная  $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b) \forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



### 1.28 Односвязная область

**Определение.** Область  $O \subset \mathbb{R}^m$  - называется **односвязной** если в ней любой замкнутый путь гомотопен постоянному пути

### 1.29 #A Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

**Определение.**  $X$  — множество,  $2^X$  — система всевозможных подмножеств в  $X$   
 $\mathcal{P} \subset 2^X$  — **полукольцо** если:

1.  $\emptyset \in \mathcal{P}$
2.  $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
3.  $\forall A, A' \in \mathcal{P} \exists$  конечное  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P}$  — дизъюнкты  

$$A \setminus A' = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$$

**Определение.**  $\mathfrak{A} \subset 2^X$  — **алгебра** подмножеств в  $X$ :

1.  $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2.  $X \in \mathfrak{A}$

**Определение.**  $\sigma$  - **алгебра**  $\mathfrak{A} \subset 2^X$

1.  $\mathfrak{A}$  — алгебра
2.  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

### 1.30 #A Объем

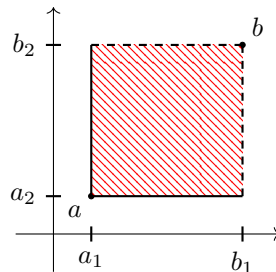
**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  — **объем**, если  $\mu \geq 0$  и  $\mu$  — аддитивная

**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — **аддитивная функция множества**, если:

1.  $\mu$  — не должна принимать значение  $\pm\infty$  одновременно (если принимает одно на каком либо множестве, не должно принимать другое на любом другом множестве)
2.  $\mu(\emptyset) = 0$
3.  $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$  — дизъюнкты. Если  $A = \bigsqcup A_i \in \mathcal{P}$ , то  $\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

### 1.31 #A Ячейка

**Определение.** ячейка в  $\mathbb{R}^m$   
 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall i \ x_i \in [a_i, b_i)\}$



### 1.32 Классический объем в $\mathbb{R}^m$

*Пример.* Классический объем в  $\mathbb{R}^m$   $\mu : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

$\mu$  не является конечным объемом



### 1.33 Формулировка теорема о непрерывности снизу

**Теорема 2.**  $\mathfrak{A}$  — алгебра,  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объем

Тогда эквивалентны:

1.  $\mu$  — мера
2.  $\mu$  — непрерывна снизу:  
 $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i \quad (7)$$

### 1.34 #A Мера, пространство с мерой

**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера, если  $\mu$  — объем и  $\mu$  — счетно аддитивна:  $\forall A, A_1, \dots \in \mathcal{P}$

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$$

**Определение. Пространство с мерой** — это тройка  $(\underbrace{X}_{\text{множество}}, \underbrace{\mathfrak{A}}_{\substack{\sigma\text{-алгебра} \\ \mathfrak{A} \subset 2^X}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера на } \mathfrak{A}})$

### 1.35 Полная мера

**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера

$\mu$  — **полная**, если  $\forall A \in \mathcal{P} \quad \mu A = 0 \quad \forall B \subset A$  выполняется  $B \in \mathcal{P}$  и (тогда автоматически)  $\mu B = 0$   
 Совместное свойство  $\mu$  и  $\mathcal{P}$

### 1.36 #A Сигма-конечная мера

**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера  $\sigma$  - **конечна**, если:  $\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : X = \bigcup A_i, \mu A_i < +\infty$

### 1.37 Дискретная мера

*Пример.*  $X$  — (бесконечное) множество

$a_1, a_2, a_3, \dots$  — набор попарно различных точек

$h_1, h_2, h_3, \dots$  — положительные числа

Для  $A \subset X$

$$\mu A := \sum_{k: a_k \in A} h_k \quad (8)$$

Счетная аддитивность  $\mu \Leftrightarrow$  Теорема о группировке слагаемых

$\mu$  — **дискретная мера**

### 1.38 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

**Теорема 1.5** (о Лебеговском продолжении меры).  $\mathcal{P}_0$  — полукольцо подмножеств пространства  $X$ ,

$\mu_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  —  $\sigma$ -конечная мера

Тогда  $\exists \sigma$ -алгебра  $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}_0, \exists \mu$  — мера на  $\mathfrak{A}$ :

1.  $\mu$  — продолжение  $\mu_0$  на  $\mathfrak{A}$
2.  $\mu$  — полная мера
3. Если  $\tilde{\mu}$  — полная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\tilde{\mathfrak{A}}$  и  $\tilde{\mu}$  — продолжение  $\mu_0$ , то  $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$  и при этом  $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если  $\mathcal{P}$  — полукольцо:  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$ , мера  $\nu$  — продолжение  $\mu_0$  на  $\mathcal{P}$   
 Тогда  $\forall A \in \mathcal{P} \quad \nu(A) = \mu(A)$
- 5.

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A = \inf \left\{ \sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \mid A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \right\} \quad (9)$$

### 1.39 #A Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

**Определение.**  $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$   $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  — продолжает  $\mu_0$   $\mu|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$

**Определение.** Мера Лебега в  $\mathbb{R}^m$  — Лебеговское продолжение классического объема образует  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{M}^m$ , на которой задана мера Лебега — множества измеримые по Лебегу

### 1.40 Борелевская сигма-алгебра

**Определение.**  $\mathfrak{B}$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра (в  $\mathbb{R}^m$  или в метрическом пространстве) — минимальная  $\sigma$ -алгебра, которая содержит все открытые множества  $\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$

### 1.41 TODO Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов

**Теорема 1.6.**  $\mu$  — мера на  $\mathfrak{M}^m$ :

1.  $\mu$  — инвариантна относительно сдвига  
 $\forall a \in \mathbb{R}^m \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E + a) = \mu E$
2. Для любого ограниченного множества  $E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E) < +\infty$

Тогда  $\exists k \in [0, +\infty) : \mu = k \cdot \lambda$   
 т.е.  $\forall E \quad \mu E = k \cdot \lambda E \quad (0 \cdot \infty = 0)$

## 2 Теоремы

### 2.1 Лемма о дифференцировании сдвига

**Лемма 2.**  $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^r(E)$  —  $r$  раз дифференцируема на  $E$ ,  $a \in E$   
 $h \in \mathbb{R}^m \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$   
 $\varphi(t) := f(a + th)$   
Тогда при  $1 \leq k \leq r$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j:|j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a) \tag{10}$$

*Доказательство.*

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_r=1}^m \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}(a + th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_3} \tag{11}$$

□

### 2.2 #A Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

**Теорема 2.1.**  $f \in C^{r+1}(E)$   $E \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in E$   
 $x \in B(a, R) \subset E$   
Тогда  $\exists \theta \in (0, 1)$

$$f(x) = \sum_{\alpha:0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \left( \sum_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_m): \alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = k}} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (x_m - a_m)^{\alpha_m} \right) + \text{аналогичный остаток}$$

$$f(a + h) = \sum_{k=1}^r \sum_{\dots} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}}(a) h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m} + \text{остаток}$$

*Доказательство.*  $\varphi(t) = f(a + th)$ , где  $h = x - a$ ,  $\varphi(0) = f(a)$ ,  $\varphi(1) = f(x)$

Из леммы

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1} \quad (12)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{однородный многочлен степени } k} + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha \quad (13)$$

$$f(a+h) = \sum \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r) \quad (14)$$

Где однородный многочлен степени  $k$  это  $k$ -ый дифференциал функции  $f$  в точке  $a$ , обозначается  $d^k f(a, h)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \theta h, h)$$

□

### 2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

*Примечание.*

1.  $\sup \leftrightarrow \max$ , т.к. сфера компактна
2.  $A = (a_{ij}) \quad \|A\| \leq \sqrt{\sum a_{ij}^2}$  - по Лемме об оценке нормы линейного отображения
3.  $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \leq \|A\| \cdot |x| \quad x = 0$  - тривиально  
 $x \neq 0 \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \quad |Ax| = |A(|x| \cdot \tilde{x})| = |x| \cdot |A\tilde{x}| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \leq \|A\| \cdot |x|$
4. Если  $\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m |Ax| \leq C \cdot |x|$ , то  $\|A\| \leq C$

#### Теорема 2.2.

1. Отображение  $A \rightarrow \|A\|$  в  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  является нормой, т.е. выполняются
  - (a)  $\|A\| \geq 0$ , если  $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{m,n}$
  - (b)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
  - (c)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2.  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad \|AB\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

*Доказательство.*

1. (a)  $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$ , очев  
 (b) очев  
 (c)  $|(A+B) \cdot x| = |Ax+Bx| \leq |Ax|+|Bx| \leq (\|A\|+\|B\|) \cdot |x|$  по замечанию 3  $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$
2.  $|BAx| = |B \cdot (Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|$  по замечанию 3

□

### 2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

**Лемма 3.**  $X, Y$  - линейные нормированные пространства  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

1.  $A$  - ограниченный оператор, т.е.  $\|A\|$  - конечное
2.  $A$  - непрерывен в нуле
3.  $A$  - непрерывен всюду в  $X$

4.  $A$  - равномерно непрерывен  
 $f: X \rightarrow Y$  - метрические пространства, равномерно непрерывно  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x, x_0: \rho(x, x_0) < \delta \implies \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$   
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x_0, x_1: |x_1 - x_0| < \delta \implies |Ax_1 - Ax_0| < \varepsilon$

Доказательство.

(4  $\Rightarrow$  3  $\Rightarrow$  2) очевидно

(2  $\Rightarrow$  1) непрерывность в нуле:

$$\begin{aligned} \text{для } \varepsilon = 1 \exists \delta: \forall x: |x - 0| \leq \delta \implies |Ax - A \cdot 0| < 1 \\ \text{при } |x| = 1 \implies |Ax| = |A \cdot \frac{1}{\delta}(\delta \cdot x)| = \frac{1}{\delta} \cdot |A \cdot \delta x| \leq \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 \Rightarrow 4) \quad |Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0| \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0: |x_1 - x_0| < \delta \implies |Ax_1 - Ax_0| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

## 2.5 Теорема Лагранжа для отображений

**Теорема 2.3.**  $F: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  дифф  $E$   $a, b \in E$

Тогда  $\exists c \in [a, b] \quad c = a + \Theta(b - a) \quad \Theta \in (0, 1)$

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| \cdot |b - a|$$

Доказательство.  $f(t) = F(a + t(b - a))$ ,  $t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = F'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$

Тогда  $\exists \Theta \in [0, 1]: |f(1) - f(0)| \leq |f'(\Theta)| \cdot |1 - 0|$  - это т. Лагранжа для векторнозначных функций  
 т.е  $|F(b) - F(a)| \leq |F'(a + \Theta(b - a)) \cdot (b - a)| \leq \|F'(\underbrace{a + \Theta(b - a)}_{\in [a, b]})\| \cdot |b - a|$  □

## 2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

**Лемма 4.**  $\mathcal{L}m, m, \Omega_m = \{L \in \mathcal{L}_{m,m} : \exists L^{-1}\}$ ,  $A \mapsto A^{-1}$

$B \in \mathcal{L}_{m,m}$  Пусть  $\exists c > 0 \forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Bx| \geq c|x|$

Тогда  $B \in \Omega_m$  и  $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство.  $B$  - биекция (конечномерный эффект??),  $\exists B^{-1}$

$$|Bx| \geq c|x| \quad x := B^{-1}y$$

$$|y| \geq c \cdot |B^{-1}y|$$

$$|B^{-1}y| \leq \frac{1}{c}|y| \implies \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$$
 □

Примечание.  $A \in \Omega_m$  Тогда  $\exists c: |Ax| \geq c \cdot |x|$

$$x = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ax| \quad c := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

**Теорема 2.4.**  $L \in \Omega_m \quad M \in \mathcal{L}_{m,m} \quad \|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$  ( $M$  - близкий к  $L$ )

Тогда

1.  $M \in \Omega_m$ , т.е.  $\Omega_m$  - открытое множество в  $\mathcal{L}_{m,m}$

$$2. \|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$$

$$3. \|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$$

Доказательство.  $|a + b| \geq |a| - |b|$

$$1. |Mx| = |Lx + (M - L)x| \geq |Lx| - |(M - L)x| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} \cdot |x| - \|M - L\| \cdot |x| \geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) \cdot |x| \implies$$

$M$  - обратим (по Лемме)

$$L \in \Omega_m \implies \exists c = \frac{1}{\|L^{-1}\|} : |Lx| \geq c \cdot |x| \quad (\text{по замечанию к Лемме})$$

$$2. \text{Из пункта 1 } c = \|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|, \text{ тогда Лемма утверждает, что } \|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|}$$

$$3. M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|L - M\| \cdot \|L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$$
 □

## 2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

**Теорема 2.5.** Пусть  $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  - дифф на  $E$

Тогда эквивалентны:

1.  $F \in C^1(E)$  т.е существуют все частные производные  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  - непрерывные на  $E$
2.  $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$  - непрерывно  
т.е  $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$

*Доказательство.*

(1  $\Rightarrow$  2) матричные элементы  $F'(x) - F'(\bar{x})$  - это  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x})$

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum \alpha_{i,j}^2}$$

Берем  $x, \varepsilon \exists \delta > 0 \forall \bar{x} \dots \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$  - сразу для всех  $i, j$

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

(2  $\Rightarrow$  1) Проверяем непрерывность в точке  $x$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

$$h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots)$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot \underbrace{|h|}_1 < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

## 2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

**Теорема 2.6.**  $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$   $a \in \text{Int}E$  - точка экстремума,  $f$  - дифф в точке  $a$

Тогда  $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

*Доказательство.* Для  $f|_{\text{прямая}(a,u)}$  точка  $a$  остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма □

*Следствие 2.6.1.* Необходимое условие экстремума  $a$  - локальный экстремум  $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

*Следствие 2.6.2.* теорема Ролля  $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$K \subset E$  - компакт  $f$  - дифф на  $\text{Int}K$  ;  $f$  - непрерывна на  $K$

$f|_{\partial K} = \text{const}$  (на границе  $K$ )

Тогда  $\exists a \in \text{Int}K \quad f'(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right) = 0$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда:

- $f = \text{const}$  на  $K \Rightarrow f' \equiv 0$
- $\exists a \in \text{Int}K$  - точка экстремума  
по Т. Ферма  $f'(a) = 0$

□

## 2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

**Лемма 5.**

1.  $Q$  - положительно определенная.

Тогда  $\exists \gamma_Q > 0 \forall h \quad Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$

2.  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  - норма

Тогда  $\exists C_1, C_2 > 0 \forall x \quad C_2 |x| \leq p(x) \leq C_1 |x|$

*Доказательство.*  $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$  — компакт  $\Rightarrow$  по Т. Вейерштрасса минимум и максимум достигаются

Для  $x = 0$  оба утверждения очевидны. Пусть  $x \neq 0$

1.  $\gamma_Q := \min_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$

Тогда  $Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$ ,  $Q(h) = Q(|h| \cdot \frac{h}{|h|}) = |h|^2 \cdot Q(\frac{h}{|h|}) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$

2.  $C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$   $C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x)$

$p(x) = p(|x| \frac{x}{|x|}) = |x| p(\frac{x}{|x|}) \begin{cases} \geq C_2 |x| \\ \leq C_1 |x| \end{cases}$

Проверим, что  $p(x)$  - непрерывная функция (для Т. Вейерштрасса),  $e_k$  — базисный вектор

$p(x - y) = p(\sum_{k=1}^m (x_k - y_k) e_k) \leq \sum p((x_k - y_k) e_k) = \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq |x - y| \cdot M$

где  $M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$ ,  $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$

□

## 2.10 #A Достаточное условие экстремума

**Теорема 2.7.**  $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$   $a \in \text{Int} E$   $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$ ,  $f \in C^2(E)$

$Q(h) := d^2 f(a, h)$ , Тогда, если:

- $Q(h)$  - положительно определено, то  $a$  - точка локального минимума
- $Q(h)$  - отрицательно определено, то  $a$  - локальный максимум
- $Q(h)$  - знакоопределено, то  $a$  - не экстремум
- $Q(h)$  - полож/отриц вырожденная - недостаточно информации

*Доказательство.*

- Для положит. опр.

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \theta h, h) = \frac{1}{2} \left( Q(h) + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^m \left( \underbrace{f''_{x_i x_i}(a + \theta h) - f''_{x_i x_i}(a)}_{\text{б.м } h \rightarrow 0} \right) h_i^2}_{\leq |h|^2} + 2 \sum_{i < j} \left( \underbrace{f''_{x_i x_j}(a + \theta h) - f''_{x_i x_j}(a)}_{\text{б.м}} \right) h_i h_j \right) \right)_{\leq |h|^2}$$

$$f(a + h) - f(a) \geq \frac{1}{2} (\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2) \geq \frac{1}{4} \gamma_Q |h|^2 > 0$$

- Для отр. опр аналогично

- $\langle \bar{h} | Q(\bar{h}) \rangle > 0$   $f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 = \frac{1}{2} \left( t^2 Q(\bar{h}) + t^2 \left( \underbrace{\sum \left( f''_{x_i x_i}(a + \Theta t\bar{h}) - f''_{x_i x_i}(a) \right) \bar{h}_i^2}_{\text{б.м при } t \rightarrow 0} + 2 \sum_{i < j} (\dots) \right) \right) \geq \geq \frac{1}{2} t^2 (Q(\bar{h}) - \frac{1}{2} Q(\bar{h})) > 0$ , т.е  $f(a + t\bar{h}) > f(a)$ , при  $t \rightarrow 0$   
Аналогично  $f(a + t\bar{h}) < f(a)$ , при малых  $t$

- Докажем примером:  $f(x_1, x_2, \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 - \dots$   $f'_{x_1}(a) = 0$ ,  $f'_{x_2} = 0$   
 $\bar{f}(x_1, x_2, \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 + \dots$   $d^2 f(a, h) = 2h_1^2$ ,  $d^2 \bar{f}(a, h) = 2h_1^2$   
 $a = (0, 0, 0, \dots)$   
 $f$  - не имеет экстремума в точке  $a$   
 $\bar{f}$  - имеет минимум в точке  $a$

□

### 2.11 Лемма о почти локальной инъективности

**Лемма 6.**  $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - дифф. в  $x_0 \in O$ ,  $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists C > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in B(0, \delta)$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$$

Доказательство.  $|h| = |A^{-1} \cdot Ah| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ah|$

$$c|h| \leq |Ah|, \text{ где } c = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$$F'(x) = F$$

Если  $F$  - линейное отображение  $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \frac{h}{\|(F'(x_0))^{-1}\|}$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б.м.}} \cdot |h| \geq c|h| - \frac{\epsilon}{2}|h| = \frac{\epsilon}{2}|h| - \text{работает в шаре} \quad \square$$

### 2.12 Теорема о сохранении области

**Теорема 2.8.**  $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - дифф

$$\forall x \in O \quad \det F'(x) \neq 0$$

Тогда  $F(O)$  - открыто

Доказательство.  $x_0 \in O \quad y_0 := F(x_0) \in F(O)$

Проверим, что  $y_0$  - внутр точка  $F(O)$ :

$$\text{По лемме } \exists c, \delta : \forall h \in B(0, \delta) \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$$

В частности  $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$ , при  $|h| = \delta$

$$r = \frac{1}{2} \text{dist}(y_0, F(S(x_0, \delta))), \quad \text{dist}(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} |a - b| \quad (15)$$

Если  $y \in B(y_0, r)$ , то

$$\text{dist}(y, F(S(x_0, \delta))) > r \quad (16)$$

Проверим, что  $B(y_0, r) \subset F(O)$ :

$$\text{т.е. } \forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) \quad F(x) = y$$

Рассмотрим функцию  $g(x) = |F(x) - y|$ , при  $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r \quad (17)$$

при  $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2$ , по (16)  $\Rightarrow \min g$  не лежит на границе шара  $\Rightarrow$  он лежит внутри шара

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2 \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \right)$$

$$\begin{cases} 2(F_1(x) - y) \cdot F'_{x_1}(x) + \dots + 2(F_m(x) - y) \cdot F'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ 2(F_1(x) - y) \cdot F'_{x_m}(x) + \dots + 2(F_m(x) - y) \cdot F'_{x_m} = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) \cdot 2(F(x) - y) = 0 \Rightarrow \forall x \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0 \quad \square$$

### 2.13 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

**Следствие 2.8.3.**  $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $l < m$ , дифф в  $O$ ,  $F \in C^1(O)$

$$\text{rg} F'(x) = l, \text{ при всех } x \in O$$

Тогда  $F(O)$  - открытое

Доказательство. Фиксируем  $x_0$ . Пусть ранг  $F'(x_0)$  реализуется на столбцах с 1 по  $l$ , т.е.  $A := \det \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1..l}(x_0) \neq 0$  - и для близких точек

$$\tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} \text{Исходные } l \text{ координат} \\ \overbrace{F(x)} \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \cdot \det E_{m-l} \neq 0$  в окрестности точки  $x_0$   
 $\tilde{F}|_{U(x_0)}$  - удовлетворяет теореме  $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$  - открыто в  $\mathbb{R}^m$   
 $F(U(x_0)) = \underbrace{\text{Pr}_{\mathbb{R}^l}}_{(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_l)} (\tilde{F}(U(x_0)))$  □

## 2.14 Теорема о гладкости обратного отображения

**Теорема 2.9.**  $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$   
 $O \subset \mathbb{R}^m$

$T$  - обратимо,  $\det T'(x) \neq 0$ , при всех  $x \in O$

Тогда  $T^{-1} \in C^r$  и  $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$ , где  $y_0 = T(x_0)$

*Доказательство.* индукция по  $r$ , база  $r = 1$

$f : X \rightarrow Y$  - невр  $\Leftrightarrow \forall B$  - отквр  $\subset Y$   $f^{-1}(B)$  - отквр

$S = T^{-1}$ ,  $S$  - непрерывна по т. о сохранении области

$T'(x_0) = A$  - невырожденный оператор

По лемме о почти локальной инъективности

$$\exists C, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (19)$$

Опр дифференцируемости:

$$T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + o(x) \cdot |x - x_0| \quad (20)$$

$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(y_0) \quad (21)$$

В терминах  $y, S$ :

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y)) \cdot |S(y) - S(y_0)|}_{\text{Проверим, что это } o(|y - y_0|)} \quad (22)$$

Пусть  $y$  близко к  $y_0$ :

$$|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta \quad (23)$$

$$\begin{aligned} |A^{-1} \cdot o(S(y)) \cdot |S(y) - S(y_0)|| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1} \cdot \omega(S(y))| \leq \\ &\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \leq \frac{1}{c} \|A^{-1}\| \cdot |y - y_0| \cdot |\omega(S(y))| \end{aligned} \quad (24)$$

Гладкость  $S$ :  $S'(y_0) = A^{-1}$

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1} \quad (25)$$

В (25) все шаги непрерывны  $\Rightarrow S'$  - непрерывно

Переход  $r \rightarrow r + 1$

$T \in C^{r+1}$   $T' : O \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$   $T' \in C^r$

Проверим, что  $S^{-1} \in C^{r+1}$ :

$$y \xrightarrow{C^r} S(y) \xrightarrow{C^r} T'(x) \xrightarrow{C^\infty} (S^{-1})' \quad (26)$$

□

## 2.15 #A Теорема о неявном отображении

**Теорема 2.10.**  $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n}_{(x_1 \dots x_n)}$   $F \in C^r$

$(a, b) \in O$   $F(a, b) = 0$

Допустим  $\det(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=1 \dots n} \neq 0$

Тогда

1.  $\exists P \subset \mathbb{R}^m$   $a \in P$  - отквр.  
 $\exists Q \subset \mathbb{R}^n$   $b \in Q$  - отквр.  
 $\exists ! \Phi : P \rightarrow Q$  -  $C^r$ -гладкое  
такие что  $\forall x \in P(a)$   $F(x, \Phi(x)) = 0$

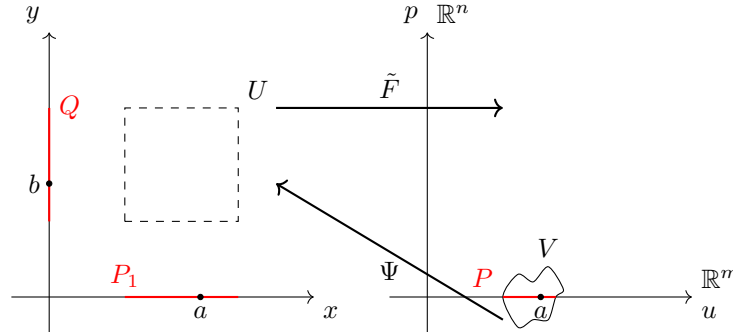
2.  $\Phi'(x) = -\left(F'_y(x, \Phi(x))\right)^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$



*Доказательство.*

Если 1) выполняется, то 2) очевидно:  $F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x)) \cdot \Phi'(x) = 0$

1.  $\tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \quad (x, y) \mapsto (x, F(x, y)) \quad \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$   
 $\tilde{F}' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$ , очевидно  $\det \tilde{F}' \neq 0$  в  $(a, b)$ , значит  $\exists U((a, b)) \tilde{F}|_{U((a, b))}$  - диффеоморфизм



- (a)  $U = P_1 \times Q$  - можно так считать  
 (b)  $V = \tilde{F}(U)$   
 (c)  $\tilde{F}$  - диффеоморфизм на  $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \rightarrow U$   
 (d)  $\tilde{F}$  - не меняет первые  $m$  координат  $\Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : V \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 (e) Ось  $x$  и ось  $u$  идентичны  $p = \text{ось } u = \mathbb{R}^m \times \{0\}^n \cap \underbrace{V}_{\text{открыто в } \mathbb{R}^{m+n}} \Rightarrow p$  открыто в  $\mathbb{R}^m$   
 (f)  $\Phi(x) = H(x, 0) \quad F(x, \Phi(x)) = 0$ , при  $x \in P$   
 $F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$

Единственность  $x \in p \quad y \in u \quad F(x, y) = 0$   
 $(x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$

□

## 2.16 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

**Теорема 2.11.**  $M \subset \mathbb{R}^m \quad 1 \leq k < m \quad 1 \leq r \leq \infty \quad p \in M$

Тогда эквивалентны:

- $\exists U \subset \mathbb{R}^m$  - окрестность точки  $p$  в  $\mathbb{R}^m$ :  $M \cap U$  - простое  $k$ -мерное многообразие класса  $C^r$
- $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$  - окрестность точки  $p$   
 $f_1, f_2, \dots, f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , все  $f \in C^r$   
 $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$ , при этом  $\text{grad}(f_1(p)), \dots, \text{grad}(f_{m-k}(p))$  - ЛНЗ

*Доказательство.*

1  $\Rightarrow$  2  $\Phi$  - параметризация :  $\underbrace{O}_{(t_1, \dots, t_k)} \subset \mathbb{R}^k, \in C^r, p = \Phi(t^0)$

$\Phi'$  - матрица  $m \times k \quad \text{rank } \Phi'(t^0) = k$

Пусть  $\det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_k} \right)_{i,j=1 \dots k} \neq 0$

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$

$L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  - проекция на первые  $k$  координат  $((x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_k))$

Тогда  $(\underbrace{L \circ \Phi}_{(\varphi_1, \dots, \varphi_k)})'(t^0)$  - невырожденный оператор

$W(t^0)$  - окрестность точки  $t^0, L \circ \Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$

$L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  - диффеоморфизм

Множество  $\Phi(W)$  - это график отображения  $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть  $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1} : V \rightarrow W$

Берем  $x' \in V$ , тогда  $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$ , т.е.  $H \in C^r$

Множество  $\Phi(W)$  - открытое в  $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$ , где  $\tilde{U}$  - открытое множество в  $\mathbb{R}^m$

Можно считать, что  $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть  $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}$

Тогда  $x \in M \cap \tilde{U} = \Phi(W) \Leftrightarrow \forall j : f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad } f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad } f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

2  $\Rightarrow$  1  $F = (f_1, \dots, f_{m-k})$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_m} \end{pmatrix} - \text{матрица } m-k \times m$$

Градиенты ЛНЗ  $\Rightarrow$  ранг матрицы равен  $m-k$ , он достигается на последних  $m-k$  столбцах

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots m-k} \neq 0$$

$$F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = 0, \quad x \in \tilde{U}$$

По теореме о неявном отображении  $\exists P$  - окрестность  $(x_1, \dots, x_k)$  в  $\mathbb{R}^m \quad \exists Q$  - окр  $(x_{k+1}, \dots, x_m)$  в  $\mathbb{R}^{m-k}$

$$\exists H : P \rightarrow Q \quad H \in C^r \quad F(x', H(x')) = 0, \quad x' \in P$$

Тогда  $\Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, H_1(x'_1, \dots, x'_k), H_2, \dots, H_{m-k})$  - параметризация многообразия

$\Phi$  - гомеоморфизм  $P$  и  $M \cap \tilde{U}$ ,  $\Phi^{-1}$  - практически проекция

□

## 2.17 Следствие о двух параметризациях

*Следствие 2.11.4.*  $M \subset \mathbb{R}^m$  -  $k$ -мерное  $C^k$ -гладкое многообразие  $p \in M$

$\exists$  две параметризации  $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_1(t^0) = 0$

$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m \quad \Phi_2(s^0) = 0$

Тогда  $\exists$  диффеоморфизм  $\Theta : O_1 \rightarrow O_2$ , что  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

*Доказательство.* Частный случай. Пусть для  $\Phi_1, \Phi_2$ ,  $\text{rank } \Phi_1'(t^0), \text{rank } \Phi_2'(s^0)$  достигаются на первых  $k$  столбцах

$$\text{Тогда } \Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta}$$

$\Theta$  - искомый диффеоморфизм

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$$

$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Невырожденность не доказана, поэтому то, что это диффеоморфизм не доказано

□

## 2.18 Лемма о корректности определения касательного пространства

**Лемма 7.**  $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \quad C^r$ -гладкое - параметризация многообразия  $U(p) \cap M$ , где  $p \in M$ ,  $M$  - гладкое  $k$ -мерное многообразие,  $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ  $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  есть  $k$ -мерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ . Оно не зависит от  $\Phi$

*Доказательство.*  $\text{rank } \Phi'(t^0) = k$

Если взять другую параметризацию  $\Phi_1 \quad \Phi = \Phi_1 \circ \Psi$

$$\Phi' = \Phi_1' \cdot \Psi' \quad \Psi'(t^0) - \text{невырожденный оператор}$$

□

## 2.19 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

*Примечание.* Пусть  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ ,  $\gamma(0) = p$  - гладкий путь

Тогда  $\gamma'(0) \in T_p M$

*Доказательство.*  $\gamma(s) = (\Phi \circ \Psi \circ L)(\gamma(s))$

$$\gamma' = \Phi' \cdot \Psi' \cdot L' \cdot \gamma'(s) \in T_p M$$

□

## 2.20 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

*Примечание.* Аффинное подпространство  $\{p + v, v \in T_p M\}$  - называется аффинным касательным пространством

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  - гладкая,  $y = f(x)$  - поверхность в  $\mathbb{R}^{m+1}$   $(x, y)$

Тогда (аффинная) касательная плоскость в  $(a, b)$  задается уравнением  $y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$

*Доказательство.*  $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$   $\Phi(x) = (x, f(x))$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \dots + \alpha_m f'_{x_m} \quad \square$$

## 2.21 #A Необходимое условие относительного локального экстремума

**Теорема 2.12** (Необходимое условие относительно экстремума).  $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$   $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  - гладкое в  $O$

$a \in O$   $\Phi(a) = 0$  - точка относительного экстремума,  $\text{rang } \Phi'(a) = n$

Тогда  $\exists \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda \cdot \Phi'(a) = 0 & \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

В координатах:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(a) - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} - \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} - \dots - \lambda_m(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}}(a) - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} - \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} - \dots - \lambda_m(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Неизвестные:  $a_1, \dots, a_{m+n}$   $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

*Доказательство.* Пусть ранг реализуется на столбцах  $x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ , обозначим  $y_1 = x_{m+1}, \dots, y_m = x_{m+n}$

$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y)$   $a = (a_x, a_y)$

$\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a) = 0$  По теореме о неявном отображении  $\exists U(a_x) \exists V(a_y)$

$\exists \varphi : U(a_x) \rightarrow V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) = 0$

отображение  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  есть параметризация  $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$

$a$  - точка относительного локального экстремума  $\Rightarrow a_x$  - точка локального экстремума функции

$g(x) = f(x, \varphi(x))$

Необходимое условие экстремума:

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi'_x)(a_x) = 0 \quad (27)$$

$\Phi(x, \varphi(x)) = 0$

$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi'_x = 0$  - в точке  $(a_x, a_y)$

Тогда

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m \quad \lambda \cdot \Phi'_x + \lambda \cdot \Phi'_y \varphi'_x(a_x) = 0 \quad (28)$$

$$(27) + (28): f'_x + \lambda \Phi'_x + (f'_y + \lambda \Phi'_y) \varphi'_x = 0$$

Пусть  $\lambda = -f'_y (\Phi'_y(a_x, a_y))^{-1}$

Тогда  $f'_y + \lambda \Phi'_y = 0$  и  $f'_x + \lambda \Phi'_x = 0$  (из (27) + (28)) □

## 2.22 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

**Теорема 2.13.**  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ .

Тогда  $\|A\| = \max\{\sqrt{|\lambda|} \mid \lambda - \text{собственное число оператора } A^T A\}$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$$

$$\langle A^T Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0$$

*Доказательство.*  $x \in S^{m-1}$   
 $|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T Ax, x \rangle}_{\text{симм.}} \quad (A^T A)^T = A^T A$   
 $\max |Ax|^2 = \max \langle A^T Ax, x \rangle = \lambda_{\max}$  □

### 2.23 #A Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

**Теорема 2.14** (Стокса–Зайдля).  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $X$  - метр. пр-во)  
 $x_0 \in X$   $f_n$  - непрерывно в  $x_0$   
 $f_n \xrightarrow{X} f$   
 Тогда  $f$  - непрерывно в  $x_0$

*Доказательство.*  $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$  (неравенство треугольника) - верно  $\forall x \forall n$   
 $f_n \xrightarrow{X} f : \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_X |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}$   
 Берем  $\forall \varepsilon > 0$ , возьмем любой  $n$ , для которого выполнено предыдущее утверждение, тогда крайние модули из неравенства  $< \frac{\varepsilon}{3}$   
 Теперь для этого  $n$  подберем  $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$   
 $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$  □

**Теорема 1'** (Стокса, Зайдля для рядов).  $u_n : \underbrace{X}_{\text{метр. пр.}} \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{норм. пр.}} \quad x_0 \in X$   $u_n$  - непрерывно в  $x_0$

Пусть  $\sum u_n(x)$  - равномерно сходится на  $X$ ,  $S(x) := \sum u_n(x)$   
 Тогда  $S(x)$  - непрерывна в  $x_0$

*Доказательство.* по теореме 1(Стокса, Зайдля).  $S_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ ,  $S_n(x)$  непрерывна в  $x_0 \Rightarrow S(x)$  непрерывна в  $x_0$  □

### 2.24 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

*Примечание.*  $x_n \rightarrow a$  в  $(X, \rho) \Rightarrow x_n$  - фунд.  $\forall \varepsilon \exists N \forall n, m > N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$   
 $X$  - полное, если каждая фундаментальная последовательность сходится

**Теорема 2.15.**  $X$  - компактное  $\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ , где  $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство  $C(X)$  - полное метрическое пространство

*Доказательство.*  $f_n$  - фунд. в  $C(X) \Rightarrow \forall x_0 \in X$  вещ. последовательность  $(f_n(x_0))$  - фундаментальна  $\Rightarrow$

$f_n$  - фунд.  $\Rightarrow$   $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  (29)

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) =: f(x_0)$   $f$  - поточечный предел  $f_n$

Проверим:  $f_n \xrightarrow{X} f, f \in C(X)$

В (29) перейдем к пределу при  $m \rightarrow +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ , т.е.  $f_n \xrightarrow{X} f$  на  $X$  и тогда  $f \in C(X)$  □

*Следствие 2.15.5.*  $(\mathcal{F}, \rho)$  - полное

### 2.25 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

**Теорема 2.**  $f_n, f \in C([a, b])$   $f_n \xrightarrow{X} f$  на  $[a, b]$

Тогда  $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

*Доказательство.*  $\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |f_n - f| \cdot (b - a) = \rho(f_n, f) \cdot (b - a) \rightarrow 0$   $\square$

**Теорема 2'** (о почленном интегрировании ряда).  $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывные на  $[a, b]$

Пусть  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  - равномерно сходится на  $[a, b]$ ,  $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда  $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)$

$S(x)$  - непрерывно на  $[a, b]$  по теореме 1'  $\Rightarrow$  можно интегрировать

*Доказательство.* По теореме 2  $S_n \rightrightarrows S$  на  $[a, b]$   $\sum_{k=0}^n \int_a^b u_k = \int_a^b S_n dx \rightarrow \int_a^b S(x)dx$   $\square$

## 2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

*Следствие 2.15.6* (Правило Лейбница).  $f : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_y \rightarrow \mathbb{R}$   $f, f'_y$  - непрерывна на  $[a, b] \times [c, d]$

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx \quad y \in [c, d]$$

Тогда  $\Phi$  - дифф. на  $[c, d]$  и  $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$

*Доказательство.*  $\frac{\Phi(y + \frac{1}{n}) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \int_a^b \frac{f(x, y + \frac{1}{n}) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx$  т. Лагранжа  $\int_a^b \underbrace{f'_y(x, y + \frac{\Theta}{n})}_{g_n(x, y)} dx$

Утв.  $f_n(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f'_y(x, y)$  на  $x \in [a, b]$ , а  $y$  считаем фиксированным — по теореме Кантора о равномерной непрерывности

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \frac{1}{N} < \delta(\varepsilon)$  — из теоремы Кантора  $\forall n > N \forall x \in [a, b] |f'_t(x, y + \frac{\delta}{n}) - f'_y(x, y)| < \varepsilon$

Таким образом  $\frac{\Phi(y + \frac{1}{n}) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \rightarrow \int_a^b f'_y(x, y)dx = \Phi'(y)$   $\square$

## 2.27 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

**Теорема 3** (О предельном переходе под знаком производной).  $f_n \in C^1(\langle a, b \rangle)$ ,  $f_n \rightarrow f$  поточечно,  $f'_n \rightrightarrows \varphi$  на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$  и  $f' \equiv \varphi$  на  $\langle a, b \rangle$

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$$

$$D \downarrow \quad \downarrow$$

$$f'_n \rightrightarrows \varphi$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f'_n(x)) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x))'$$

*Доказательство.*  $x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$   $f'_n \rightrightarrows \varphi$  на  $[a, b] \xrightarrow{T.2} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi$ , т.е.

$$\begin{cases} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f_n(x_1) - f_n(x_0) \rightarrow f(x_1) - f(x_0) \end{cases}$$

Итак  $\forall x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$   $f(x_1) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi$

$$\underbrace{f'_n}_{\text{непр}} \varphi \Rightarrow \left. \begin{matrix} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непрерывная} \end{matrix} \right\} \Rightarrow f' = \varphi$$

$\square$

**Теорема 3'** (о дифференцировании ряда по параметру).  $u_n \in C^1(\langle a, b \rangle)$

Пусть:

1.  $\sum u_n(x) = S(x)$  - поточечная сходимость
2.  $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$  - равномерно сходится на  $\langle a, b \rangle$

Тогда:

1.  $S(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$
2.  $S' = \varphi$  на  $\langle a, b \rangle$

т.е.  $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

*Доказательство.*

- $f_n \rightarrow f$  — поточечно
- $f'_n \rightrightarrows f'$

Тогда  $f' = \varphi$ ,  $f \in C^1$

- $S_n \rightarrow S$  — поточечно
- $S'_n \rightrightarrows \varphi$

□

## 2.28 #A Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

**Теорема 2.16** (признак Вейерштрасса).  $\sum u_n(x)$   $x \in X$

Пусть  $\exists C_n$  - вещественная последовательность,  $\begin{cases} u_n(x) \leq C_n \\ \sum C_n - \text{сходится} \end{cases}$

Тогда  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$

*Доказательство.*  $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq C_{n+1} + \dots + C_{n+p}$  - Тривиально

$\sum C_n$  - сходится  $\Rightarrow$  удовлетворяет критерию Больцано-Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E$   $C_{n+1} + \dots + C_{n+p} < \varepsilon$

Тогда  $\sum u_n(x)$  удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости

□

## 2.29 ГИХМЕ Дифференцируемость гамма функции

*Пример.* Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \cdot \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

, где  $\gamma$  - постоянная Эйлера

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)$$

фиксируем  $x_0$   $u'_k(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$

Пусть  $M > x_0$  Тогда

$$\left| \frac{-x}{(x+k)k} \right| \leq \frac{M}{k^2}, \text{ при } x \in (0, M)$$

$\sum \frac{M}{k^2}$  - сходится

Тогда  $\sum \frac{-x}{(x+k)k}$  равномерно сходится на  $(0, M)$

Значит  $\ln \Gamma(x) \in C^1(0, M) \Rightarrow \Gamma \in C^1(0, M)$

Примечание (к примеру).

$$\begin{aligned}
 -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k} \\
 \Gamma'(x) &= -\Gamma(x) \cdot \left( \frac{1}{x} + \gamma - \sum \dots \right) \\
 \Gamma''(x) &= \dots
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Получается, что  $\Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

### 2.30 Теорема о предельном переходе в суммах.

**Теорема 4'** (о почленном переходе в суммах).  $u_n : E \subset X \xrightarrow{\text{м.п.}} \mathbb{R}$ ,  $x_0$  - предельная точка  $E$   
 Пусть:

1.  $\forall n \exists$  конечный  $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$
2.  $\sum u_n(x)$  — равномерно сходится на  $E$

Тогда:

1.  $\sum a_n$  — сходится
2.  $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right)
 \tag{31}$$

*Доказательство.*

1.  $\sum a_n$  - сходится  
 $x_n$  - фундаментальная  
 $\forall \varepsilon \exists N \forall m, n > N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), \quad S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k
 \tag{32}$$

Проверим, что  $S_n^a$  - фундаментальная

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|
 \tag{33}$$

Из равномерной сходимости  $\sum u_n(x) : \forall \varepsilon \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \quad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$   
 Это критерий Больццано-Коши для равномерной сходимости  
 Зададим  $\varepsilon$ , по  $N$  выберем  $n$ ,  $n+p$  и возьмем  $x$  близко к  $x_0$ :

$$|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}
 \tag{34}$$

$$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}
 \tag{35}$$

Тогда выполнено (4), т.е.  $|S_{n+p}^a - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$   
 Это фундаментальность последовательности  $S_n^a \Rightarrow \sum a_n$  - сходится

2.  $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x)$   
 Сводим к теореме Стокса-Зайдля:

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n & x = x_0 \end{cases}
 \tag{36}$$

— задана на  $E \cup \{x_0\}$ , непрерывна в  $x_0$  (переход (8)  $\rightarrow$  (9))  
 $\sum \tilde{u}_n(x)$  - равномерно сходится на  $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$  сумма ряда непрерывна в  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum \tilde{u}_n(x) =
 \tag{37}$$

$$= \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n \tag{38}$$

$$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \leq \sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \right| \tag{39}$$

В (10) в правой части оба слагаемых  $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  отсюда равномерная сходимость ряда  $\sum \tilde{u}_n(x)$

□

### 2.31 Теорема о перестановке двух предельных переходов

**Теорема 4** (о перестановке двух предельных переходов).  $f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  - предельная точка  $E$

Пусть:

1.  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x)$  на  $E$
2.  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$

Тогда:

1.  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2.  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & S(x) \\ x \rightarrow x_0 \downarrow & & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ A_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & A \end{array}$$

*Доказательство.*  $u_1 = f_1, \dots, u_k = f_k - f_{k-1}, \dots$  Тогда  $f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$   
 $a_1 = A_1, \dots, a_k = A_k - A_{k-1}, \dots, A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

В этих обозначениях:  $\sum u_k(x)$  — равномерно сходится к сумме  $S(x)$

$$u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_k$$

Тогда по т. 4?  $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$  — имеет конечный предел, при  $n \rightarrow +\infty$   
 $\sum a_k$  - сходится

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum a_k = A \tag{40}$$

□

### 2.32 #A Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

**Теорема 2.17** (признак Дирихле).  $\sum a_n(x)b_n(x)$  — вещественный ряд,  $x \in X$

Пусть:

1. Частичные суммы ряда  $\sum a_n$  - равномерно ограничены  
 $\exists C_a \forall N \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq C_a$
2.  $\forall x$  последовательность  $b_n(x)$  — монотонна по  $n$  и  $b_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  на  $X$

Тогда ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  равномерно сходится на  $X$

Для числовых рядов:  $\sum a_n b_n$

1. частичные суммы  $a_n$  - ограничены
2.  $b_n \rightarrow 0$ ,  $b_n$  - монотонна

Тогда  $\sum a_n b_n$  - сходится



*Доказательство.*

$$\sum_{k=M}^N a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{k=M}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \text{ где } A_k = \sum_{i=1}^k a_i \quad (41)$$

*преобразование Абеля(суммирование по частям)*

$$\left| \sum_{k=M}^N a_k(x) b_k(x) \right| \leq C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_{M-1}| + \sum_{k=M}^{N-1} C_a \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq C_a (|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=1}^{N-1} |b_k - b_{k+1}|) \leq \quad (42)$$

$$\leq C_a (2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|) \quad (43)$$

Переход (5) → (6): в сумме все разности одного знака ⇒ "телескопическая" и равна ±(b<sub>M</sub> - b<sub>N</sub>)  
 ∀ε > 0 ∃K : ∀l > K ∀x ∈ X |b<sub>l</sub>(x)| <  $\frac{\varepsilon}{4C_a}$

Значит при M, N > K ∀x ∈ X  $\left| \sum_{k=M}^N a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon$  — это критерий Больцано-Коши равномерной сходимости ряда □

### 2.33 Теорема о круге сходимости степенного ряда

**Теорема 2.18** (о круге сходимости степенного ряды).  $\sum a_n(z - z_0)^n$  - степенной ряд  
 Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех  $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится только при  $z = z_0$
3. ∃R ∈ (0, +∞): при:
  - $|z - z_0| < R$  ряд сходится
  - $|z - z_0| > R$  ряд расходится

*Доказательство. Признак Коши:*  $\sum a_n \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} = r$

- $r < 1$  ряд сходится
- $r > 1$  ряд расходится

$$\sum a_n(z - z_0)^n \quad \lim \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = |z - z_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} \quad (44)$$

- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  тогда  $r = 0$  и есть (абсолютная) сходимость при всех  $z$
- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$  тогда  $r = +\infty$  при  $z \neq z_0$   
 А при  $z = z_0$  ряд очевидно сходится
- $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0, +\infty \quad |z - z_0| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{\text{def}}{=} R$

1.  $|z - z_0| < R$  ряд сходится абсолютно
2.  $|z - z_0| > R$  ряд расходится, т.к. слагаемые  $\not\rightarrow 0$

□

### 2.34 Теорема о непрерывности степенного ряда

**Теорема 2.19** (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда).

$$\sum a_n(z - z_0)^n \quad 0 < R \leq +\infty$$

1.  $\forall r : 0 < r < R$  Ряд сходится равномерно в шаре  $\overline{B(z_0, r)}$
2.  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  — непрерывна в  $B(z_0, R)$

*Доказательство.*

1. Если  $0 < r < R$ , то при  $z = z_0 + r$  ряд абсолютно сходится (по теореме о радиусе сходимости), т.е.  $\sum |a_n| \cdot r^n$  — конечна  
признак Вейрештрасса:

- при  $|z - z_0| \leq r$   $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n$
- $\sum |a_n| r^n$  — конечна

$\Rightarrow$  есть равномерная сходимость на  $\overline{B(z_0, r)}$

2. Следует из 1. и теоремы Стокса-Зайдля  
Если  $z$  удовлетворяет  $|z - z_0| < R \Rightarrow \exists r_0 < R \quad z \in B(z_0, r_0)$   
На  $B(z_0, r_0)$  есть равномерная сходимость  $\Rightarrow f$  — непрерывна в  $z$

□

## 2.35 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

**Теорема 2.20** (о дифференцируемости степенного ряда).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad 0 < R < +\infty \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (45)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1} \quad (46)$$

Тогда:

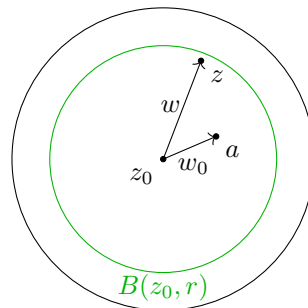
1. Радиус сходимости ряда (46) равен  $R$
2.  $\forall z \in B(z_0, R) \exists f'(z)$  и  $f'(z) = (46)$

*Доказательство.*

1. По формуле Адамара  $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$   
Ряд (46) сходится при каком-то  $z \Leftrightarrow \sum n a_n(z - z_0)^{n-1}$  — сходится  
Смотрим на частичные суммы

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{n a_n}} = \frac{1}{1 \cdot \lim \sqrt[n]{a_n}} = R \quad (47)$$

2.  $a \in B(z_0, R), \exists x < R, a \in B(z_0, r)$   
 $a = z_0 + w_0, |w_0| < r$   
 $z = z_0 + w, |w| < r$



$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \quad (48)$$

Последнее выражение по модулю по Лемме  $\leq n \cdot r^{n-1} \cdot |a_n|$ , ряд  $\sum n r^{n-1} |a_n|$  — сходится по 1., т.е. ряд (48) равномерно сходится в круге  $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \lim \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (a - z_0)^{n-1} \quad (49)$$

□

Следствие 2.20.7.  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ ,  $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$

Тогда:

1.  $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$  — тот же радиус сходимости
2.  $\int_{x_0}^x f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$   
Замечание.  $\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + const$

Доказательство.

1. Продифференцируем ряд  $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ . По теореме он имеет тот же радиус сходимости что и ряд  $\sum a_n(z-z_0)^n$
2. Мы можем вычислить производные левой и правой части, они совпадают, при  $x = x_0$  ясно что константа нулевая  $\Rightarrow$  левая и правая части равны

□

Пример.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Продифференцируем:

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

Находим  $C$  подставляя  $x = 0$   $\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$ , итого:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

## 2.36 Свойства экспоненты

Определение.  $\sum \frac{z^n}{n!}$   $A = \infty$   $\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  Свойства:

1.  $\exp(0) = 1$
2.  $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$
3.  $f_0$  — показательная функция, удовлетворяет  $f(x+y) = f(x)f(y)$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_0(x)-1}{x} = 1$   
 $f_0(x) := \exp(x)$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \exp'(0) = 1$
4.  $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

Доказательство.  $\overline{w_1 + w_2} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$

Потому что коэффициент вещественный:

$$\overline{\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^N \frac{(\bar{z})^n}{n!} \tag{50}$$

□

**Теорема 2.21.**  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ , тогда  $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

*Доказательство.*

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum c_n \quad (51)$$

$$\text{, где } c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \cdot n! = \frac{(z+w)^n}{n!} \quad (52)$$

$$\sum c_n = \sum \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w) \quad (53)$$

□

*Следствие 2.21.8.*  $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) \neq 0$

### 2.37 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

**Теорема 2.22** (Абеля).  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n$  — сходящийся  $C_n \in \mathbb{C}$

$$f(x) = \sum C_n x^n, \quad R \geq 1, \quad -1 < x < 1$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sum C_n$

*Доказательство.* Ряд  $\sum C_n x^n$  равномерно сходится на  $[0, 1]$  по признаку Абеля

$$a_n(x) := C_n \quad b_n(x) := x^n \Rightarrow \text{этот ряд сходится}$$

Функции  $C_n x^n$  — непрерывны на  $[0, 1] \Rightarrow$  (по т. Стокса-Зайдля)  $\sum C_n x^n$  — непрерывны на  $[0, 1]$  □

*Следствие 2.22.9.*  $\sum a_n = A, \sum b_n = B, C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

Пусть  $\sum C_n = C$

Тогда  $C = A \cdot B$

*Доказательство.*  $f(x) = \sum a_n x^n \quad g(x) = b_n x^n \quad h(x) = \sum c_n x^n \quad x \in [0, 1]$

$x < 1$  Есть абсолютная сходимость  $a_n, b_n \Rightarrow$  можно перемножать:

$$f(x)g(x) = h(x), \text{ тогда при переход в пределе } x \rightarrow 1 - 0 \Rightarrow A \cdot B = C \quad \square$$

### 2.38 Единственность разложения функции в ряд

**Определение.**  $f$  — разлагается в степенной ряд в окрестности  $x_0$  если:

$\exists \varepsilon > 0 \exists C_n$  — вещественная последовательность

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (54)$$

**Теорема 2.23** (единственности).  $f$  — разлагается в степенной ряд в окрестности  $x_0$

Тогда разложение единственно

*Доказательство.* выполняется (54)

$$c_0 = f(x_0), \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n (x - x_0)^{n-1} \quad (55)$$

$$c_1 = f'(x_0), \quad f''(x) = \dots \quad (56)$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) C_n (x - x_0)^{n-k} \quad (57)$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (58)$$

□

### 2.39 Разложение бинома в ряд Тейлора

**Теорема 2.24.**  $\forall \sigma \in \mathbb{R} \forall x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}x^2 + \dots$$

*Доказательство.* при  $|x| < 1$  ряд сходится по признаку Деламбера

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(\sigma-n)x}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| < 1 \quad (59)$$

Обозначим сумму ряда через  $S(x)$

*Наблюдение:*  $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$\sum a_n \leftrightarrow \sum a_n x^n = f(x) \quad (60)$$

$$\sum a_n n x^{n-1} = f'(x) \quad (61)$$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} x^n + \dots \quad (62)$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} x^n \quad (63)$$

$$(1+x)S' = \dots + \left( \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \cdot n \right) x^n + \dots = \quad (64)$$

$$= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \cdot \sigma x^n + \dots \quad (65)$$

$$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S' \cdot (1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1} \cdot S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0 \Rightarrow f = const \quad f(0) = 1 \Rightarrow f \equiv 1 \quad \square$$

### 2.40 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

**Теорема 2.25.**  $f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$

$f$  — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists \delta, C, A > 0 \forall n \forall x : |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < C \cdot A^n \cdot n!$$

*Доказательство.*

( $\Leftarrow$ ) формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n \quad (66)$$

$$\left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n \right| \leq C \cdot |A(x-x_0)|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (67)$$

Разложение имеет место при  $|x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$

( $\Rightarrow$ )

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (68)$$

Возьмем  $x_1 \neq x_0$ , для которого это верно

- при  $x = x_0$ , ряд сходится  $\Rightarrow$  слагаемые  $\rightarrow 0 \Rightarrow$  ограничены

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n \right| \leq C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leq C_1 n! B^n \quad (69)$$

, где  $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$

- 

$$f^{(m)}(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1)\dots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m} = \quad (70)$$

$$= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} (x-x_0)^{n-m} \quad (71)$$

Пусть  $|x - x_0| < \frac{1}{2B}$

$$|f^{(n)}(x)| \leq \sum \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} \right| (x-x_0)^{n-m} \leq \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!} = \quad (72)$$

$$= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \underbrace{(B|x-x_0|)^{n-m}}_{< \frac{1}{2}} \stackrel{\text{Сл. 2}}{=} \frac{C_1 B^n m!}{\underbrace{(1 - \underbrace{B|x-x_0|}_{< \frac{1}{2}})^{m+1}}_{> \frac{1}{2}}} < \quad (73)$$

$$< C_1 2^{m+1} B^m m! = \underbrace{(2C_1)}_C \cdot \underbrace{(2B)}_A^m m! \quad (74)$$

Эта оценка выполняется при  $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

□

## 2.41 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

### Теорема 2.26.

1. Линейность интеграла по полю:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall U, V - \text{векторных полей } I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

*Доказательство.* Из определения (первый двух выражений в равенстве)

□

2. Аддитивность интеграла при дроблении пути:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad c \in [a, b] \quad \gamma^1 = \gamma|_{[a,c]} \quad \gamma^2 = \gamma|_{[c,b]}$$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$$

*Доказательство.* По аддитивности интеграла (первый двух выражений в равенстве)

□

3. Замена параметра

$$\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b] \quad \varphi \in C^1 \quad \varphi(p) = a, \quad \varphi(q) = b \quad \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma}) - \text{это замена переменных в интеграле}$$

*Доказательство.*  $I(V, \tilde{\gamma}) =$

$$= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(S))), \underbrace{\tilde{\gamma}'(S)}_{\gamma'(\varphi(S)) \cdot \varphi'(S)} \rangle ds = \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(S))), \gamma'(\varphi(S)) \rangle \cdot \varphi'(s) ds \stackrel{t:=\varphi(s)}{=} \underbrace{\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt}_{I(V, \gamma)}$$

□

*Примечание.* По теореме о двух параметризациях

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m - \text{ параметризация гладкого одномерного многообразия (простое)}$$

$$\tilde{\gamma} : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^m - \text{ диффеоморфизм } \varphi : [p, q] \rightarrow [a, b] \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$$

4. Объединение носителей

$$\gamma^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \gamma^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \gamma^1(b) = \gamma^2(c)$$

$$\text{Зададим новый путь } \gamma = \gamma^2 \gamma^1 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma^1(t) & , t \in [a, b] \\ \gamma^2(t + c - b) & , t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

В точке  $b$  излом. Если  $\gamma^1, \gamma^2$  - кусочно гладкие, то  $\gamma$  - кусочно гладкий

$$\text{Тогда } I(V, \gamma^2 \gamma^1) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$$

$$\text{Доказательство. } I(V, \gamma) = \int_a^{b+d-c} \dots = \int_a^b \dots + \underbrace{\int_b^{b+d-c} \dots}_{\text{замена } \tau=t-b+c} = I(V, \gamma^1) + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), (\gamma^2)'(\tau) \rangle d\tau = I(V, \gamma^2)$$

$$\text{При замене: } \gamma(t) = \gamma^2(t + c - b) = \gamma^2(\tau) \quad \gamma'(t) = (\gamma^2)'(t + c - b) = (\gamma^2)'(\tau)$$

□

5. Противоположный путь

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t) - \text{противоположный путь}$$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$$

$$\text{Доказательство. } I(V, \gamma^-) =$$

$$= \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau) \rangle d\tau \stackrel{t=a+b-\tau}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t) \rangle \cdot (-dt) = -I(V, \gamma)$$

$$\text{При замене } (\gamma^-)'(\tau) = -\gamma'(a + b - \tau) \quad \square$$

6. Оценка интеграла векторного поля по пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma), \text{ где } L = \gamma([a, b]) - \text{носитель пути}$$

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| dt \leq \int_a^b |V(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$

Можем писать max, т.к.  $V$  - непрерывна,  $L$  - компакт(путь непрерывен, образ замкнутого отрезка под действием непрерывного отображения(носитель) компакт)

## 2.42 #A Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

**Теорема 2.27.** (обобщенная формула Ньютона-Лейбница)

$V : O \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^m$ , потенциально,  $f$  — потенциал  $V$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow O \quad \gamma(a) = A, \quad \gamma(b) = B$$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = \int_{\gamma} \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

*Доказательство.*

$$1. \gamma - \text{гладкий } \Phi(t) = f(\gamma(t)) \quad \Phi' = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t)) \cdot \gamma_m'(t)$$

$$\text{Учитывая что } \text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) = V$$

$$\int_{\gamma} \sum u_k dx_k = \int_a^b \Phi'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) = f(b) - f(a)$$

$$2. \gamma - \text{кусочно гладкий } a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$$

$$\int_{\gamma} \sum u_n dx_k = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \stackrel{n.1}{=} \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) = f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) = f(B) - f(A)$$

Последняя сумма является телескопической

□

## 2.43 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

**Теорема 2.28** (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов).  $V$  - векторное поле в области  $O$ . Тогда эквивалентны:

1.  $V$  - потенциально

$$2. \int_{\gamma} \sum V_i dx_i \text{ не зависит от пути в области } O$$

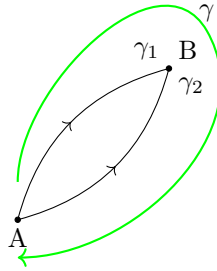
$$3. \forall \gamma - \text{кусочно гладкого, замкнутого в } O \int_{\gamma} \sum V_i dx_i = 0$$

*Доказательство.*

• 1  $\Rightarrow$  2: обобщенная формула Ньютона-Лейбница

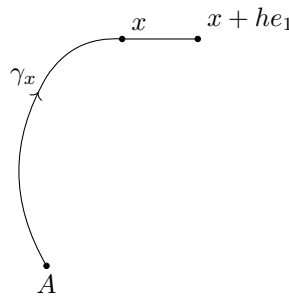
• 2  $\Rightarrow$  3:  $\gamma$  - петля:  $[a, b] \rightarrow O \quad \gamma(a) = \gamma(b) = A$   
 Рассмотрим простой путь  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O \quad \gamma(t) = A$   
 по свойству 2  $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} = 0 (= \int \langle V, \underbrace{\gamma'}_0 \rangle dt)$

- 3  $\Rightarrow$  2:  $\gamma_1, \gamma_2$  - пути с общим началом и концом



$$\gamma := \gamma_2^{-1} \gamma_1 - \text{кусочно гладкая петля } 0 = \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$$

- 2  $\Rightarrow$  1: Фиксируем  $A \in O$   
 $\forall x \in O$  выберем кусочно гладкий путь  $\gamma_x$ , который ведет из  $A$  в  $x$   
 $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i$  - проверим что это потенциал  
 Достаточно проверить  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$  в  $O$   
 Фиксируем  $x \in O$



$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= x + t h e_1, \quad t \in [0, 1] \\ \gamma'_0(t) &= (h, 0, \dots, 0) = h e_1 \\ f(x + h e_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+h e_1}} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_0} = \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) \cdot h dt = \\ &= h \cdot V_1(x_1 + ch, x_2, \dots, x_n) \\ \text{Таким образом } \frac{f(x+h e_1) - f(x)}{h} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x) \end{aligned}$$

□

## 2.44 ГИХМЕ [#A] Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

**Лемма 8.**  $V$  - гладкое, потенциальное в  $O$

Тогда  $\forall x \in O \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}$

Доказательство.  $\dots = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$

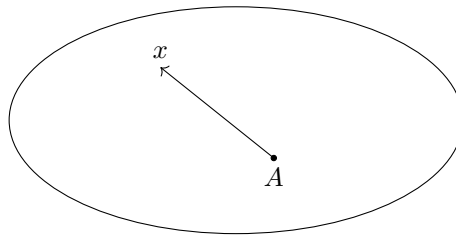
□

**Теорема 2.29** (лемма Пуанкаре).  $O \in \mathbb{R}^m$  - выпуклая область  $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$  - векторное поле  $V$  - удовлетворяет условиям леммы ( $V$  - гладкое)

Тогда  $V$  - потенциальное

Доказательство. Фиксируем  $A \in O$   
 $\forall x \in O \gamma_x(t) := A + t \cdot (x - a), \quad t \in [0, 1]$





$\gamma'_x(t) = x - A$  - постоянный вектор

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A)) \cdot (x_k - A_k) dt$$

Проверим, что  $f$  - потенциал

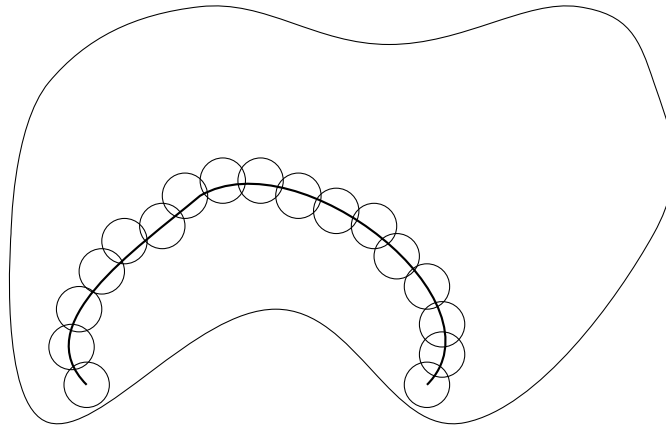
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \langle \text{правило Лейбница} \rangle = \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \underbrace{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\dots)}_{\frac{\partial V_j}{\partial x_k}} \cdot t(x_k - A_k) dt = \\ &= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))'_t dt = t \cdot V_j(A + t(x - A)) \Big|_{t=0}^{t=1} = V_j(x) \end{aligned} \quad \square$$

### 2.45 Лемма о гусенице

**Лемма 9** (о гусенице).  $\gamma : [a, b] \rightarrow \overset{\text{отк. мн.}}{O} \subset \mathbb{R}^m$  - непрерывное

Тогда  $\exists$  дробление  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

и  $\exists$  шары  $B_1, \dots, B_n \subset O$   $\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$



*Доказательство.*  $\forall c \in [a, b]$  возьмем  $B_c := B(\gamma(c), r_c) \subset O$   
произвол!!

$$\tilde{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] \mid \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$$

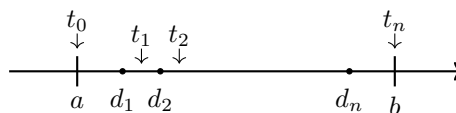
$$\tilde{\beta}_c := \sup\{\alpha \in [a, b] \mid \gamma[c, \alpha] \subset B_c\}$$

Возьмем  $(\alpha_c, \beta_c) : \tilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \tilde{\beta}_c$

Таким образом  $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$  - открытое покрытие  $[a, b]$

Для случая  $c = a$  или  $c = b$  вместо  $(\alpha_c, \beta_c)$  берем  $[a, \beta_a)$ ,  $(\alpha_b, b]$

$[a, b]$  - компактен  $\Rightarrow [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$ , н.у.о ни один интервал не покрывается целиком остальными  $\forall (\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$  - принадлежащая "только этому" интервалу



Точка  $t_k$  выбирается на отрезке  $(d_k, d_{k+1})$  и  $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k \quad \square$$

### 2.46 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

**Лемма 10** (о равенстве интегралов локально потенциального векторного поля по похожим путям).

$V$  - локально потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O - V$  - похожие, кусочно гладкие,  $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$ ,  $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда  $\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

*Доказательство.* Берем общую  $V$  - гусеницу

Пусть  $f_k$  - потенциал  $V$  в шаре  $B_k$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Поправим потенциал (прибавим константы)

$f_k(t_k) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$  при  $k = 1, 2, \dots, n$

Тогда

$$\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \overset{\text{обобщ. ф-ла Н.-Л.}}{=} \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) = \quad (75)$$

$$= \text{"телесопическая"} - f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \quad (76)$$

Для  $\tilde{\gamma}$  воспользуемся свойством:  $f_k|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}|_{B_k \cap B_{k+1}}$

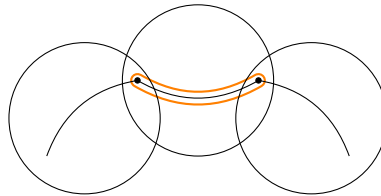
и тогда аналогично  $\int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$  □

### 2.47 Лемма о похожести путей, близких к данному

**Лемма 11.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow O$  - непрерывный,  $V$  - локально потенциальное векторное поле в  $O$

Тогда  $\exists \delta > 0$  Если  $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \rightarrow O$  таковы, что  $\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$  то  $\tilde{\gamma}$  и  $\tilde{\tilde{\gamma}}$  ( $u, \gamma$ ) -  $V$  - похожи

*Доказательство.* Берем  $V$  - гусеницу для  $\gamma$



$\delta_k$  - окрестность множества  $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

$\forall k \exists \delta_k > 0 : (\delta_k \text{ - окрестность } \gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$

$\delta$  - окрестность множества  $A : \{x \mid \exists a \in A \rho(a, x) < \delta\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta)$  Следует их компактности:

пусть  $B_k = B(w, r)$

$t \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$  - непрерывная функция  $\Rightarrow$  достигает  $\max$

$\rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r \quad \delta_k := \frac{r-r_0}{2}$

$\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_k)$  □

### 2.48 Равенство интегралов по гомотопным путям

**Теорема 2.30.**  $V$  - локально потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma_0, \gamma_1$  - связанны гомотопные пути

Тогда  $\int_{\gamma_0} V_i dx_i = \int_{\gamma_1} V_i dx_i$

*Примечание.* То же самое выполнено для петельных гомотопий

*Доказательство.*  $\gamma_u(t) := \Gamma(t, u)$ ,  $t \in [a, b]$   $u \in [0, 1]$

$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$

Проверим:  $\Phi$  - локально постоянна

$\forall u_0 \in [0, 1] \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$

$\Gamma$  - непрерывна на  $[a, b] \times [0, 1]$  - компакт  $\Rightarrow \Gamma$  - равномерно непрерывна

$\forall \delta > 0 \exists \sigma > 0 \forall t, t' \mid t - t' < \sigma \forall u, u' \mid u - u' < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$

**Лемма 3**  $\gamma : [a, b] \rightarrow O$

Тогда  $\exists \delta > 0$  со свойством

Если  $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$  - близки к  $\gamma$

т.е.  $\forall t \in [a, b]$

- $|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \delta$
- $|\tilde{\tilde{\gamma}}(t) - \gamma(t)| < \delta$

то  $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} - V$  - похожие

Возьмем параметр  $\delta$  из Леммы 3 для пути  $\gamma_{u_0}$   
 Если  $|u - u_0| < \sigma$   $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$ , при  $t \in [a, b]$ , т.е.  $\gamma_u$  и  $\gamma_{u_0}$  - похожи по Лемме 3  
 Построим кусочно гладкий путь  $\tilde{\gamma}_{u_0} \frac{\delta}{4}$  - близкий к  $\gamma_{u_0} \forall t \in [a, b] \quad |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}(t)| < \frac{\delta}{4}$   
 и кусочно гладкий путь  $\tilde{\gamma}_u \frac{\delta}{4}$  - близкий к  $\gamma_u$   
 Тогда  $\tilde{\gamma}_{u_0}$  и  $\tilde{\gamma}_u - \delta$  - близкие к  $\gamma_{u_0} \Rightarrow$  они  $V$  - похожие  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$   
 т.е.  $\Phi(u) = \Phi(u_0)$ , при  $|u - u_0| < \delta$  □

## 2.49 #A Теорема Пуанкаре для односвязной области

**Теорема 2.31.**  $O \subset \mathbb{R}^m$  - односвязная область  
 $V$  - локально потенциальное векторное поле в  $O$   
 Тогда  $V$  - потенциальное в  $O$

*Доказательство. Теорема. Эквивалентны:*

1.  $V$  - потенциальное
2. ...
3.  $\forall$  кусочно гладкой петли  $\gamma: \int_{\gamma} \sum V_i dx_i = 0$

$V$  - локально постоянно,  $\gamma_0$  - кусочно гладкая петля, тогда  $\gamma_0$  гомотопна постоянному пути  $\gamma_1 \Rightarrow$   
 $\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0 \Rightarrow V$  - потенциально □

*Следствие 2.31.10.* Теорема Пуанкаре верна в односвязной области  
 Дифференциальный критерий:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \tag{77}$$

Лемма Пуанкаре: (77)  $\Rightarrow V$  - локально потенциально

## 2.50 Теорема о веревочке

**Теорема 2.32** (о веревочке).

- $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow O$   
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля не стягиваема

*Доказательство.*

$V(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$  - векторное поле в  $\mathbb{R}^2$

Проверим что  $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{78}$$

Равенство частных производных выполняется если  $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow V$  - локально потенциально

При этом

$$\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \tag{79}$$

(3)  $\Rightarrow$  петля не стягиваема (Если бы была стягиваема, то интеграл изначально должен был быть равен 0, т.к. интеграл при гомотопиях не меняется), а поле  $V$  - не потенциально □

## 2.51 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

**Теорема 2.33** (о свойствах объема).  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объем  
Тогда он имеет свойства:

1. Усиленная монотонность  
 $\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}_{\text{дизъюнкты}} \in \mathcal{P} \quad \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A \quad \sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A$
2. Конечная полуаддитивность  
 $\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i$
3.  $\forall A, B \in \mathcal{P}$  пусть еще известно:  $A \setminus B \in \mathcal{P}$ ,  $\mu B$  — конечный  
Тогда  $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

*Примечание.*

- в пунктах 1 и 2 не предполагается, что  $\bigcup A_i \in \mathcal{P}$
- в пункте 3 если  $\mathcal{P}$  — алгебра то условие  $A \setminus B \in \mathcal{P}$  можно убрать (оно выполняется автоматически)

*Доказательство.*

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца:  $A \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigsqcup_{l=1}^S B_l$  — доказано ранее  
таким образом  $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$  — дизъюнктное объединение конечного числа множеств  
 $\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_l \geq \sum \mu A_i$

2. объем  $\Rightarrow$  конечная полуаддитивность

$$A \subset \bigcup_{\text{кон.}} A_k \mu A \leq \sum \mu A_k \quad (A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}) \quad (80)$$

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \quad A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k \quad (81)$$

Сделаем эти множества дизъюнктными

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) \quad A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k \quad (82)$$

Но эти  $C_k$  вообще говоря  $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_i D_{kj}, \quad D_{kj} \in \mathcal{P} \quad (83)$$

Тогда:

$$A = \bigsqcup_{k,j} D_{kj} \quad \mu A = \sum \mu D_{kj} \quad (84)$$

При этом  $\forall k$ :

$$\sum_j \mu D_{kj} = \mu C_k \leq \mu A_k \quad (85)$$

Неравенство в (18) в силу монотонности объема (п.1 теоремы). Итого

$$\mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{kj} = \sum \mu C_k \leq \sum \mu A_k \quad (86)$$

3. (a)  $B \subset A \quad A = B \sqcup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$   
 (b)  $B \not\subset A \quad A \setminus B = \underbrace{A \setminus (A \cap B)}_{\in \mathcal{P}} \quad \mu(A \setminus B) \stackrel{(a)}{=} \mu A - \underbrace{\mu(A \cap B)}_{\text{монот.}} \geq \mu A - \mu B$

□

## 2.52 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полу-аддитивности

**Теорема 1.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объем

Тогда эквивалентны:

1.  $\mu$  — мера, т.е.  $\mu$  — счетно аддитивна
2.  $\mu$  — счетно полу-аддитивна:  
 $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$

*Доказательство.*

(1  $\Rightarrow$  2) Как в предыдущей теореме (доказательство п.2) в формулах 15, 17, 19 вместо конечных объединений и сумм надо рассматривать счетные

(2  $\Rightarrow$  1)  $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  проверим  $\mu A = \sum \mu A_i$ :

$$\forall N \quad A \supset \bigsqcup_{i=1}^N A_i \quad \mu A \geq \sum_{i=1}^N \mu A_i \quad (87)$$

$$A \subset \bigcup A_i \quad \mu A \leq \sum \mu A_i \quad (88)$$

Тогда  $\mu A = \sum \mu A_i$

□

## 2.53 Теоремы о непрерывности сверху

**Теорема 3.**  $\mathfrak{A}$  — алгебра  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$  — конечный объем

Тогда эквивалентны:

1.  $\mu$  — мера, т.е. счетно аддитивная функция множества
2.  $\mu$  — непрерывна сверху:  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$   
 $A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad A = \bigcap A_i \Rightarrow \mu A = \lim \mu A_i$

*Доказательство.*

(1  $\Rightarrow$  2)  $B_k = A_k \setminus A_{k+1} \quad A_1 = \bigsqcup B_k \sqcup A$

$$\underbrace{\mu A_1}_{\text{кон.}} = \sum_{\Rightarrow \text{сх.}} \mu B_k + \mu A$$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} B_k \sqcup A \quad \mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu A \quad (89)$$

(2  $\Rightarrow$  1) Дана непрерывность сверху. Воспользуемся ей для случая  $A = \emptyset$

Проверяем счетную аддитивность:  $C = \bigsqcup C_i \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu C = \sum \mu C_i$

$$A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{\infty} C_i \quad (90)$$

Тогда:

$$A_k \in \mathfrak{A} : A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^k C_i \quad (91)$$

последнее выражение содержит конечное число операций

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^k C_i \sqcup A_k \quad \mu C = \sum_{i=1}^k \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sum \mu C_i \quad (92)$$

□

## 2.54 Счетная аддитивность классического объема

**Теорема 2.34.**  $\mu : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — классический объем в  $\mathbb{R}^m$

Тогда  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера

*Доказательство.*  $\sigma$ -конечность очевидна

Проверим, что  $\mu$  — счетно аддитивна, для этого достаточно проверить счетную полуаддитивность  $P = [a, b)$ ,  $P_n = [a_n, b_n)$   $P \subset \bigcup P_n$ , проверить  $\mu P \leq \sum \mu P_n$

$P = \emptyset \Rightarrow$  утверждение тривиально

$P \neq \emptyset$  Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Чуть уменьшим координаты вектора  $b$ :  $[a, b'] \subset [a, b)$  и  $\mu P - \mu[a, b'] < \varepsilon$   
Уменьшим слегка координаты векторов  $a_n$ :

- $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n]$   $\mu[a'_n, b_n] - \mu[a_n, b_n] < \frac{\varepsilon}{2^n}$
- $[a, b'] \subset \bigcup_{\text{комп.}} (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists$  конечное подпокрытие:  $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N [a'_n, b_n]$

Тогда

$$\mu[a, b'] \leq \sum_{1 \leq n \leq N} \mu[a'_n, b_n] \tag{93}$$

$$\mu P - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^N (\mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) \tag{94}$$

$$\mu P - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon \tag{95}$$

□

## 2.55 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

**Лемма 12.**

1.  $O \subset \mathbb{R}^m$  — открыто

Тогда  $O = \bigsqcup Q_i$ , где  $Q_i$  — ячейки с рациональными координатами (можно считать  $Q_i$  — кубические ячейки, двоичные рациональные координаты)

2. Можно считать, что  $\overline{Q_i} \subset O$

3.  $E$  — измеримо,  $\lambda E = 0$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0$   $E \subset \bigcup Q_i$ :  $Q_i$  — кубическая ячейка и  $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$

*Доказательство.*

1.  $\forall x \in O$ , пусть  $Q(x)$  — какая-то ячейка с рациональными координатами,  $Q(x) \subset O$  (можно потребовать  $\overline{Q(x)} \subset O$ ;  $Q$  — куб; двоично рациональные координаты)

$O = \bigcup_{x \in O} Q(x)$  — здесь не более чем счетное множество различных ячеек

$\Rightarrow O = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$  — сделаем ячейки дизъюнктивными

$$Q_1 := Q(x_1) \quad Q(x_2) \setminus Q(x_1) \stackrel{\text{св-во п/к}}{=} \bigsqcup D_j \tag{96}$$

Переобозначим  $D_j$  как  $Q_2, Q_3, \dots, Q_k$

$$Q(x_3) \setminus \left( \bigsqcup_{i=1}^k Q_i \right) = \bigsqcup P_l \tag{97}$$

переобозначим  $P_l$ , как  $Q_{k+1}, \dots, Q_s$  и так далее.

Можно считать что координаты всех ячеек двоично рациональны

$\bigsqcup Q_i$  — можно подразбить эти ячейки, чтобы они стали кубическими

$[a_i, b_i)$  — двоично рациональные координаты.  $\frac{1}{2^i}$  — самый крупный знаменатель

$[a_i, b_i]$  — конечное объединение кубических ячеек со стороны  $\frac{1}{2^i}$

2. уже доказано

3. Следует из теоремы о Лебеговском продолжении (п. 5)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ ячейки } P_k \quad E \subset P_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda P_k \leq \varepsilon$$

$$\exists \tilde{P}_k \text{ — двоично рациональные ячейки: } P_k \subset \tilde{P}_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda_k \tilde{P}_k \leq 2\varepsilon$$

Можно разбить  $P_k$  на конечное число кубов

□

## 2.56 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Пример.  $x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y$  если  $x - y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}|_{\mathbb{Q}} = A$  — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать  $A \subset [0, 1]$

Очевидно, что:

$$\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R} \quad (98)$$

$$[0, 1] \stackrel{(1*)}{\subset} \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q) \stackrel{(2*)}{\subset} [-1, 2] \quad (99)$$

Верно ли что  $A$  измеримо? т.е.  $A \in \mathfrak{M}^1$ ?

Допустим, что да: очевидно  $\forall q \lambda A = \lambda(A + q)$  (по п.5 Т. о продолжении меры)

$$\text{из (1*): } \lambda[0, 1] = 1 \leq \sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \lambda A \Rightarrow \lambda A > 0$$

$$\text{из (2*): } \lambda((A + q)) = \sum_q \lambda A \leq \lambda[-1, 2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$$

Противоречие  $\Rightarrow A$  — не измеримо

## 2.57 #A Регулярность меры Лебега

Следствие 2.34.11.  $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K \text{ — компакт.}}} \lambda(K) \quad (*) \quad (100)$$

Доказательство. (\*) следует из  $\sigma$ -конечности

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q(0, n) \quad (101)$$

$$Q(a, R) = \bigtimes_{i=1}^n [a_i - R, a_i + R]$$

$$\lambda(A \cap Q(0, n)) \rightarrow \lambda A \text{ — по непрерывности снизу} \quad (102)$$

□

## 2.58 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

**Лемма 13.**  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное

Пусть  $\forall E \in \mathfrak{M}^m : \lambda E = 0$  выполняется  $\lambda(T E) = 0$

Тогда  $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad T A \in \mathfrak{M}^n$

Доказательство.

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N} \quad (103)$$

, где  $K_j$  — компактное множество,  $\lambda(\mathcal{N}) = 0$

$$T A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \underbrace{T K_j}_{\text{комп.}} \cup \underbrace{T \mathcal{N}}_{\lambda(T \mathcal{N})=0} \quad (104)$$

$T K_j$  — компактно, как образ компакта при непрерывном отображении

(8)  $\Rightarrow T A$  — измеримо

□

## 2.59 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

**Теорема 2.35.**  $O \subset \mathbb{R}^m$  — открытое,  $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi \in C^1(O)$

Тогда  $\forall A \subset O$ ,  $A \in \mathfrak{M}^m$   $\Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$

*Доказательство.* Достаточно проверить свойство:  $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$   
 $\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$  шары  $B_i : E \subset \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon$

( $\Rightarrow$ ) из Т. о лебеговском продолжении меры

( $\Leftarrow$ ) используем полноту меры Лебега

1.  $E \subset \underset{\text{ячейка}}{P} \subset \bar{P} \subset O$ ,  $\lambda E = 0$

$$L := \max_{x \in \bar{P}} \|\Phi'(x)\| \quad (105)$$

Тогда  $\forall x, y \in P \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$  — неравенство Лагранжа

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr) \quad (106)$$

$$Q(x_0, \frac{r}{\sqrt{m}}) \subset B(x_0, r) \Rightarrow \left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m < \lambda B(x_0, r) \quad (107)$$

$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr) \subset \bigcup Q(y_i, Lr) \quad (108)$$

$$\sum \lambda \Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = L^m \sum (2r_i)^m \quad (109)$$

$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow \sum \left(\frac{2r_i}{\sqrt{m}}\right)^m < \varepsilon \Rightarrow \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m})^m \quad (110)$$

$$\sum \lambda B(y_i, Lr) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m}L)^m \quad (111)$$

, где  $B_i = B(x_i, r_i)$ ,  $y_i = \Phi(x_i)$

2.  $E \subset O$  — произвольное,  $\lambda E = 0$   
 $O = \bigsqcup Q_i$ , где  $Q_i$  — кубические ячейки,  $Q_i \subset \bar{Q}_i \subset O$   
 $E = \bigsqcup (E \cap Q_i)$  по п.1  $\lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$   
 $\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$

□

## 2.60 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

**Теорема 2.36** (инвариантность меры Лебега относительно линейных ортогональных преобразований).  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — ортогональное преобразование

Тогда  $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

1.  $TA \in \mathfrak{M}^m$
2.  $\lambda(TA) = \lambda A$

*Доказательство.*

1.  $T \in C^1$  — поэтому измеримость сохраняется
2.  $\mu A := \lambda(TA)$ ,  $\mu$  — мера на  $\mathfrak{M}^m$  по Лемме 1, при этом  $\mu$  — инвариантна относительно сдвигов  
 $\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \lambda A$   
 $A$  — ограничена  $\Rightarrow TA$  — ограничена  $\Rightarrow \mu A < +\infty$   
по теореме  $\lambda(TA) = k \cdot \lambda A$   
Найдем  $k$ : возьмем шар  $B$ ,  $TB =$  шар того же радиуса  $= B + x_0$ , таким образом  $\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$

□