For test

Ilya Yaroshevskiy

13 мая 2023 г.

Содержание

1. задача
2. разделяющиеся переменные
3. линейное
4. Бернулли
5. УПД
6. понижение порядка
7. понижение порядка
8. метод последовательных приближений Пикара

1 Задание 1

Фезека

2 Задание 2

Уравнения приводящиеся в вид

$$f(x)dx = g(y)dy$$
$$\Downarrow$$
$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$
$$\Downarrow$$
$$F(x) = G(y)$$

3 Задание 3

Линейные уравнения первого порядка

$$y' + a(x)y = f(x)$$
$$u(x) = \exp \int a(x)dx$$
$$y = \frac{\int u(x)f(x)dx + C}{u(x)}$$

4 Задание 4

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)y^m$
При $m = 0$ - линейное уравнение
$m = 1$ - уравнение с разделяющими переменными
Иначе сводится к линейному подстановкой $z = y^{1-m}$ в уравнение $z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x)$

5 Задание 5

Уравнения вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

уравнение в полных диффернциалах если $\exists u(x,y) : du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
И $Q'_x = P'_y$
Тогда решение $u(x,y) = C$

5.1 Алгоритм

1. Запишем систему
   $\begin{cases} u'_x = P(x,y) \\ u'_y = Q(x,y) \end{cases}$

2. Проинтегрируем первое уравнение по x, считая y константой, так-же примем C за $\varphi(y)$

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$$

3. Продифиренцируем полученное $u(x,y)$ по y и подставим во вторoе уравнение

$$u'_y(x,y) = \left(\int P(x,y)dx\right)'_y + \varphi'_y(y) = Q(x,y)$$

4. Проинтегрируем полученное уранение и найдем $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \int \left[Q(x,y) - \left(\int P(x,y)dx\right)'_y\right] dy$$

5. Подставим $\varphi(y)$ в $u(x,y)$, получим итоговое решение

$$u(x,y) = C$$

5.2 Нахождение интегрируещего множителя

Если $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$
Находим такое $\varphi(x,y)$, что:

$$Q\varphi'_x - P\varphi'_y = \varphi(P'_y - Q'_x)$$

1. Если $\varphi(x,y) = \varphi(x)$, то найдем его из уравнения

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x)$$

2. Если $\varphi(x, y) = \varphi(y)$, то найдем его из уравнения
$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{1}{P}(P'_y - Q'_x)$$

3. Если φ зависит от обоих переменных, тогда если $\exists z : \varphi(z) = \varphi(x, y)$, то найдем φ из уравнения
$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dz} = \frac{P'_y - Q'_x}{Qz'_x - Pz'_y}$$

6 Задание 6

Уравнение вида
$$F(x, y, y', y'') = 0$$

1. $y'' = f(x)$
Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$
Тогда решим $p' = f(x)$, затем решим $y' = p(x)$

2. $y'' = f(y)$
Возьмем новую функцию $p(y) : y' = p(y)$
Тогда решим $\frac{dp}{dy}p = f(y)$, затем решим $y' = p(y)$

3. $y'' = f(y')$
Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$
Тогда решим $p' = f(p)$, затем решим $y' = p(x)$

4. $y'' = f(x, y')$
Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$
Тогда решим $p' = f(x, p)$, затем решим $y' = p(x)$

5. $y'' = f(y, y')$
Возьмем новую функцию $p(y) : y' = p(y)$
Тогда решим $\frac{dp}{dy}p = f(y, p)$, затем решим $y' = p(y)$

6. $F(x, y, y', y'')$ - одннородная функция аргументов y, y', y''
$F(x, ky, ky', ky'') = k^m F(x, y, y', y'') \Rightarrow$ однородная
Используем подстановку $y = e^{\int z dx}$
Находим z, затем находим $y(x) = C_2 e^{\int z dx}$

7. $F(x, y, y', y'')$ - точная производная
Если найдем $\Phi(x, y, y') : F(x, y, y', y'') = \Phi'_x(x, y, y')$, то решение: $\Phi(x, y, y') = C$

7 Задание 8

Метод Пикара
Дано x_0, $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{k-1}(\xi))d\xi$$

- **Пример**

$$t_0 = 0 \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = tx \end{cases}$$
Прим. $\dot{u} = u'_t$

$$x(0) = 0, y(0) = 0$$
$$x_n = x_0 + \int_0^t (x_{n-1}(\xi) - y_{n-1}(\xi)) d\xi$$
$$y_n = y_0 + \int_0^t (\xi x_{n-1}(\xi)) d\xi$$

$$x_1 = 1 + t$$
$$y_1 = \frac{t^2}{2}$$
$$x_2 = 1 + t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}$$
$$y_2 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$$

- **Пример**

$$y'' - y' \sin x - x^2 = 0$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = z \sin x + x^2 \end{cases}$$

$$y_0 = 1, z_0 = 0$$
$$y_n = y_0 + \int_0^x z_{n-1}(\xi) d\xi$$
$$z_n = z_0 + \int_0^x (z_{n-1}(\xi) \sin \xi + \xi^2) d\xi$$
$$z_1 = \frac{x^3}{3}$$
$$y_2 = 1 + \frac{x^4}{12}$$

8 Полезные техники

8.1 Линейное однородное уравнение n-го порядка

Имеем уравнение: $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n y(x) = 0$
Решим такое уравнение: $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

1. Все корни различные
   Тогда решение: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$

2. Есть кратные корни
   Есть n корней
   Различные корни: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$
   Степени корней: $k_1, \ldots, k_m$
   Тогда решение:

   $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{k_1} x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{n-k_m+1} e^{\lambda_m x} + C_{n-k_m+2} x e^{\lambda_m x} + \cdots + C_n x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x}$$