Дискретная Математика. Практика 1

Конспекты

5 сентября

Содержание

Задача 1. Макс. кол-во королей, которые можно разместить на доске 8×8, так чтобы они не били друг друга

Решение. Ни в каком квадрате 2×2 не может стоять два короля. По принципу Дирихле верхняя граница – $(\frac{8}{2})^2 = 16$

Ответ: 16

Задача 2. Доделать

Решение. Принцип Дирихле. Ящики – кол-во матчей, которое сыграла одна команда: $0, \dots, n-1$. Заметим, что "ящики"0 и $n-1$ не могут одновременно осдержать элементы, значит макс. число ящиков – $n-1$, команд n.

Задача 3. Доделать

Задача 4. Доделать

Задача 5. Доделать

Доказательство. Контейнеры:

- $\{1, 2, 4, \dots, 2^k\}$
- $\{3, 6, 12, \dots, 3 \cdot 2^l\}$
- $\{5, 10, 20, \dots, 5 \cdot 2^m\}$
- $\dots$

Всего контейнеров – кол-во нечетных чисел меньше $2n+1$, т.е. n. Всего чисел – $n+1$. По принципу дирихле в каком-то контейнере будет как минимум 2 числа, т.е. одно из них будет делиться на другое. $\square$

Задача 6. Доделать

Задача 7. Доказать что

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Доказательство. По индукции:
База: $n = 1: \ 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$
Индукционный переход: $k \mapsto k+1$.

$$1^2 + \dots + k^2 = \frac{1(k+1)(2k+1)}{6}$$

Докажем что

$$\begin{aligned} \frac{1(k+2)(2k+3)}{6} &= 1^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \overset{}{\underset{\text{ИП}}{=\!=}} \\ &= \frac{1(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \dots \end{aligned}$$

$\square$

Задача 8. $\boxed{\text{Доделать}}$

Решение. База:

- $5 : \{5\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}$
- $6 : \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$
- $8 : \{8, 4\}, \{7, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}$
- $9 : \{9, 6\}, \{8, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Переход: $k \mapsto k + 6$