

Лекции по Дискретной Математике

Конспекты

1 Семестр

Оглавление

Лекция 1	2
1.1 План	2
1.2 Методы доказательства	2
1.2.1 Прямое	2
1.2.2 Индукция	2
1.2.3 От противного	2
1.2.4 Перебор	2
1.2.5 Комбинаторное доказательство	2
1.2.6 Принцип крайнего	2
1.2.7 Принцип Дирихле	3
1.3 Множества	3

Лекция 1

1.1 План

- **Комбинаторика**
Материалы
 - чит. Шень
 - см. Омельченко
- **Теорию вер.**
Материалы:
 - чит. Бородин
 - см. Храбров
- **Графы**
Материалы:
 - чит. Карпов

1.2 Методы доказательства

1.2.1 Прямое

1.2.2 Индукция

Пример.

$$\begin{cases} 2^K \mapsto 2^{K+1} \\ K \mapsto K - 1 \end{cases}$$

Неравенство Коши для среднего арифметического и среднего геометрического

1.2.3 От противного

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

Пример. $n^2 - \text{чет} \Rightarrow n - \text{чет?}$. $\mid n - \text{нечет}$. $n \cdot n - \text{нечет} = n^2$ Противоречие.

1.2.4 Перебор

Пример. Никакой квадрат не заканчивается на 7.

1.2.5 Комбинаторное доказательство

1.2.6 Принцип крайнего

Пример. Множество простых чисел бесконечно? \mid Простых чисел конечное число: $p_1 < p_2 < \dots < p_n$.
 $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ – простое и больше p_i .

1.2.7 Принцип Дирихле

n ящиков, k кроликов. $k > n \Rightarrow \exists$ ящик в котором находится хотя бы 2 кролика. $k > m \cdot n \Rightarrow \exists$ ящик в котором находится хотя бы $m + 1$ кроликов.

Доказательство.] не так. Тогда в каждом ящике $\leq m$ кроликов. Тогда во всех ящиках $\leq m \cdot n$ кроликов. Противоречие. \square

1.3 Множества

Множества $A := \{7, \text{стул}, \text{Ъ}\}$.

- $7 \in A$
- $\{7\} \subset A$
- $|A| = 3$

Операции над множествами:

- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Замечание. $|A \cap B| \leq |A|, |A \cap B| \leq |B|$
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Замечание. Если $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$
Замечание.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- Разность $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Замечание. $|A \setminus B| = |A \cup B| - |B| = |A| - |A \cap B|$
- Дополнение $\bar{A} := \Omega \setminus A$
Замечание. $|\bar{A}| = |\Omega| - |A|$
- Симметрическая разность $A \Delta B = A \oplus B := \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$
Замечание. $|A \oplus B| = |A \cup B| - |A \cap B|$
- Декартового произведения $A \times B := \{\langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B\}$

Обозначение. $A \times A = A^2$

Замечание. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$