Лекции по Математической логики. Лекция 1

Конспекты

11 февраля

Содержание

1. Логика высказываний

Определение 1.1:
- $a, b, c, ..., x, y, z, a_1, a_2, ...$ — пропозициональные переменные
- Формулы задаются следующим языком

$$L ::= L \mid \neg L \mid L \wedge L \mid L \vee L \mid L \to L$$

- Приоритет: $\neg, \wedge, \vee, \to$
- $\wedge, \vee$ — левоассоциативны

2. Оценки (valuation)

Определение 2.1: **Тавтология** (общезначимая формула) — "оценка" тождественно истинна.

Определение 2.2: **Противоречие** — константно ложно.

Определение 2.3: Формула определяем булеву функцию $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Если две формулы задают одну и ту же функцию, то они **эквивалентны**

Примечание: Эквивалентность с точностью до фиктивных переменных (которые не влияют на результат)

Пример:

***Утверждение** 2.1*: Две формулы A и B эквивалентны ттогда когда $(A \to B) \wedge (B \to A)$ — тавтология

Доказательство: Эта формула истинна ттогда когда $[\![A]\!] = [\![B]\!]$. ■

Определение 2.4: Подстановка $[p := B]A$

Теорема 2.1 (о подстановке): Подстановка в тавтология остается тавтологией

Примечание:

- *Нейтральные*: $p \wedge 1 \leftrightarrow p, p \vee 0 \leftrightarrow p$
- *Аннигиляторы*: $p \wedge 0 \leftrightarrow 0, p \vee 1 \leftrightarrow 1$
- *Идемпотентность*: $p \wedge p \leftrightarrow p, p \vee p \leftrightarrow p$

где $1 \equiv q \to q, 0 \equiv q \wedge \neg q$.

- *Коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции*
- *Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции и наоборот*
- законы *поглощения* $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p, p \vee p \wedge q \leftrightarrow p$
- законы *Де Моргана* $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q, \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- законы *контрапозиции* $p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg q$
- снятие *двойного отрицания* $\neg\neg p \to p$
- законы *исключенного третьего* $p \vee \neg p$
- закон *отрицания посылки* $\neg p \to p \to q$ (из противоречия следует что угодно)
- закон *импликации через отрицание и дизъюнкцию* $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$
- закон *Пирса* $((p \to q) \to p) \to p$
- $p \wedge q \to r \leftrightarrow p \to q \to r$

Определение 2.5: **Логическое (семантическое) следствие** — если для какой-то оценки набор формул $A_1, A_2, ...$ истиннен и при этом B истинно, то $A_1, A_2, ... \vDash B$.

Примечание: Для тавтологии B пишут $\vDash B$.

Теорема 2.2: $A_1, A_2, ... \vDash B$ ттогда, когда $\vDash A_1 \wedge A_2 ... \to B$.

3. Булева алгебра

Множество с операциями $\wedge, \vee, \neg, \to$ и выделенными элементами $1, 0$. Аксиомы: ассоциативность, коммутативность, поглощение, дистрибутивность, нейтральный, дополнения(?).

Пример: Одноэементное множество

Пример: Множество всех поднможеств непустого $S - 2^S$. $\wedge = \cap, \vee = \cup, \neg = S \setminus \cdot$