ДЗ

Ilya Yaroshevskiy

20 сентября 2025 г.

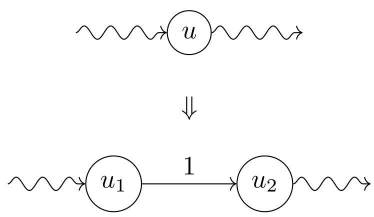
Содержание

Задание 3.9

Дан неориентированный граф. Найти максимальное число вершинно непересекающихся путей из s в t.

Сделаем из неориентированного графа ориентированный, построив для каждого неор. ребра (u, v), ор. ребра (u, v) и (v, u) с пропускными способностями равными 1.

Теперь перестроим граф следующим образом: каждую вершину u, кроме s и t, заменим на две u_1 и u_2. $\forall v : (v, u) \in E$ добавим ребро (v, u_1), аналогично $\forall w : (u, w) \in E$ добавим ребро (u_2, w). Добавим ребро (u_1, u_2) с пропускной способностью равной 1.

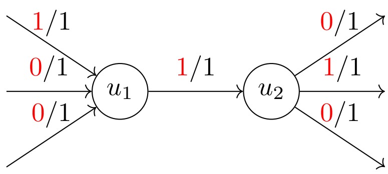


Рассмотрим вершинно непересекающиеся пути $s \rightsquigarrow t$ в исходном графе. Заметим что в новом графе соответсвующие пути также будут вершинно непересекающимися, значит по каждому такому пути можно пустить поток величины 1. Тогда будет выполняться неравенство $k \leq F_{\max}$, где k — число вершинно непересекающихся путей, $F_{\max}$ — максимальный поток в новом графе.

Рассмотрим максимальный поток, в котором поток по каждому ребру целочисленный(задача 3.3).

1. 'Запустим' dfs из начальной вершины до конечной: будем ходить по ребрам, поток по которым равен 1.

2. Заметим, что для всех ребер (u_1, u_2) поток по ним не больше 1, значит суммарный входящий в u_1 и выходящий из u_2 потоки также не превышают 1.



С учетом п. 2, различные пути найденные в п. 1 будут вершинно непересекающиеся и их количество будет равно суммарному потоку: $k \leq k_{\max} \leq F_{\max}, \; k = F_{\max} \Rightarrow k_{\max} = F_{\max}$

Осталось показать что найденные пути будут существовать в исходном графе. Действительно, если путь проходит через вершину u_1, то он проходит и через вершину u_2. Значит можно сжать эти две вершину в одну, которая в свою очередь однозначно определяется в исходном графе.

Получаем что максимальное количество вершинно непересекающихся путей в неориентированном графе равно максимальному потоку в графе, построенному выше указаным образом.